Inhaltsverzeichnis

13.10.2009

1 Einführung in die gewöhnliche Differentialgleichungen

GG: in der wir eine Funktion $x : I \to R$ suchen, in der Gleichung kommen auch Ableitungen von x vor:
(Partielle DGL: Gleichung, in der wir Funktionen $u : \Omega \to R$ suchen, $\Omega \subset R^d, d \geq 2$, in der Gleichung kommen partielle Ableitungen nach mindestens zwei Variablen vor.)
System: GDGL, selbe Definition, n Gleichungen für $x : I \to R^n$

$x' = 0 \to$ gelöst von jeder Konstanten Funktion
$x(t_0) = x_0$ Anfangswert

$$\left.\begin{aligned} x' = \quad & f(x(t), t) \in (t_0, T) \\ x(t_0) = \quad & x_0 \end{aligned}\right\} \text{Anfangswertproblem}$$

$x' = f(x(t), t) \in (a, b)$

1.1 Beispiel 1: „stetige“ Verzinsung

Tägliche Verzinsung mit Zinssatz r
$t = 0$, Vermögen V_0, $\delta t = \frac{1}{365}$
$V(\delta) = V_0(1 + r\delta t)$
$V(2 * \delta) = V(\delta)(1 + r\delta t)$
...
$V(t + \delta) = V(t)(1 + r\delta t)$

$\frac{V(t+\delta)-V(t)}{\delta t} = V(t)r$

1.1.1 Taylor-Entwicklung

$V(t + \delta t) = V(t) + V'(t)\delta t + 1/2V''(\tau)\delta t^2, \tau \in (t, t + \delta t]$
$$V(t + \delta t) = V(t) + \sum_{j=1}^{k} \tfrac{1}{j!} V^{(j)}(\delta t)^j + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} V^{(k+1)}(\tau)(\delta t)^{k+1}}_{\leq \frac{(\delta)^{k+1}}{(k+1)!} ||V^{(k+1)}||_\infty}$$
$V'(t) + 1/2V''(\tau)\delta t = rV(t)$
$\delta t \to 0, V'(t) = rV(t)$
$log(V)' = V'/V = r$
$log(V) = rt + c$
$t = 0 : log(V_0) = c, log(V(t))0rt + log(V_0), V(t) = V_0 e^{rt}$

Spezialfälle von $x' = f(x, t)$
Separierte Dgl.: $x' = g(x)h(t)$
$\frac{x'}{g(x)} = h(t)$
Suchen Stammfunktion von $1/g$ und von h
$G'(x) = 1/g(x), H'(x) = h(t)$
$\frac{d}{dt}G(x(t)) = G'(x(t))x'(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))}$
$G(x(t)) = H(t) + c$
$x(0) = x_0 \to c = G(x_0) - H(0)$
$G(x(t)) = G(x_0) + H(t) - H(0)$

$\boxed{x(t) = G^{-1}(G(x_0) + H(t) - H(0))}$

1.2 'Lineare Dgl" mit konstanten Koeffizienten

$x' = Ax, A \in R^{n\times n}$
$\underbrace{x(t)}_{\in R^n} = \underbrace{e^{At}}_{\in R^{n\times n}} \underbrace{x_0}_{\in R^n}, e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$

einfacher für A diagonalisierbar
$A = BDB^{-1}$, D Diagonalisierbar, B reguläre Matrix
$A^2 = BDB^{-1}BDB^{-1} = BD^2B^{-1}$
$A^k = BD^kB^{-1}$

$x(t) = B(e^{d_i^k}t)B^{-1}x_0$
$x' = Ax, x = By, y = B^{-1}x, x' = By'$
$By' = ABy \to y'B^{-1}ABy \to y' = Dy \to y_k' = d_k y_k$

1.3 Beispiel 2: Newton'sche Teilchenmechanik

$x(t)$: Raumkoordinaten zur Zeit t
v = x'
Massenbeobachtung $mv' = F(x, v, t)$

$$\left.\begin{aligned} x' &= v \\ mx'' = mv' &= F(x,v,t) \end{aligned}\right\} \text{g. Dgl}$$

N Teilchen, $i = 1, ..., N x_i(t), v_i(t)$
$x_i' = v_i$
$m_{v_i'} = F_i^{ext}(x_i, v_i, t) + \sum_{j\neq i} F_{ij}(x_i, x_j)$
$F_{ij} = -F_{ji}$
$6N$ Differentialgleichungen

1.3.1 Gravitation

$F_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^3}(x_i - x_j) = -\nabla(G\frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|})$
$N = 2$:
$x_1' = v_1$, $x_2' = v_2$
$m_1 v_2' - G\frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3}(x_1 - x_2)$
$m_2 v_2 = +G\frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3}(x_1 - x_2)$

1.3.2 Impulserhaltung

$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$
$\Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = const$
$\Rightarrow m_1 x_1' + m_2 x_2' = A$
$\Rightarrow m_1 x_1 + m_2 v_2 = At + B$

1.3.3 Energieerhaltung

$\frac{d}{dt}(-G\frac{m_1 m_2}{|x_1-x_2|} + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2) = 0$

16.10.2009

1.4 Beispiel 3: Molekulardynamik

N Moleküle, $x_i \in R^2$, $v_i \in R^3$, $(p_i - m_i v_i \in R^3)$
$x_i' = v_i$
$m_{v_i}' = -\nabla U_{ext}(x_i, t) - \sum_{j \neq i} \nabla U_{int}(x_i - x_j)$
Pot Energie $\sum_i U_{ext}(x_i) + 1/2 \sum_{i,j} U_{int}(x_i - x_j)$

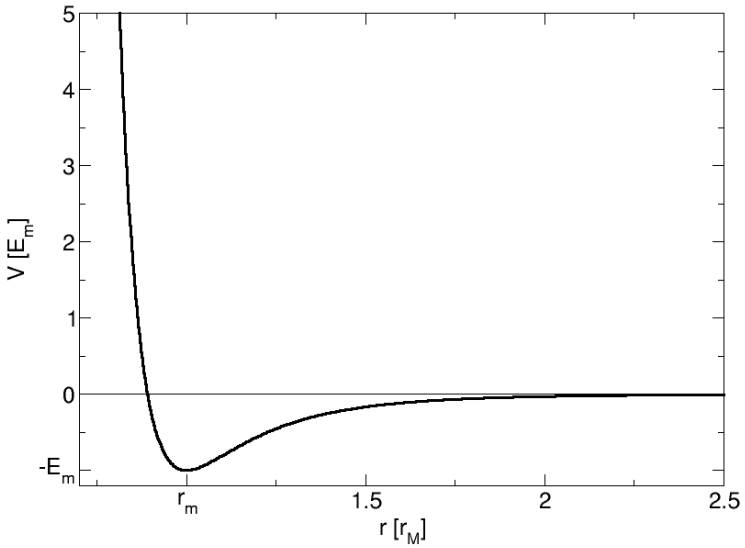

Abbildung 1: Lennard-Jones-Potential V vs. Abstand r zwischen den Atomen

Problem: extrem kleine Zeitschnitte nötig bei der numerischen Lösung, um Durchdringung zu vermeiden.

1.5 Beispiel 4: Reaktionskinetik

Monomolekulare Reaktion: (z.B. Radioaktiver Zerfall)
Wahrscheinlichkeit einer Reaktion von A zu B in Zeitintervall $(t, t+\delta t) \approx k\delta t$
$n_A(t)$ = Anzahl von Molekülen A zum Zeitpunkt t; $4n_A(t+\delta t) \approx n_A(t) - k\delta t n_A(t)$
$\frac{n_A(t+\delta t - n_A(t)}{\delta t} = -kn_A(t)$
$\delta t -> 0, n_A'(t) = -kn_A(t)$
$n_A(t) = n_A(0)e^{-kt}$
Bimolekulare Reaktion:
$A + B -> [k+] < -[k-]C + D$

1.6 Beispiel 4: DNA-Replikation

$n_A' = n_B' = -k_+ \underbrace{n_A(t)n_B(t)}_{=\text{Anzahl der } (A,B)\text{-Paare}} + k_- n_C(t)n_D(t)$
$n_C' = n_B' = k_+ n_A(t)n_B(t) - k_- n_C(t)n_D(t)$
Einhaltung der Gesamtanzahl: $(n_A + n_B + n_C + n_D)' = 0$

1.7 Beispiel 5: Populationsdynamik

$n(t)$ = Anzahl der Individuen zur Zeit t
$n'(t) = gn(t) - sn(t) = (g-s)n(t)$
$n'(t) = (g-s)n(t) + E(t) - A(t)$

1.8 Beispiel 6: Räuber-Beute Modell(Lotke-Voltena Modell)

$R(t)$ = erw. Anzahl an Räubern
$B(t)$ = erw. Anzahl an Beutetieren
$B'(t) = aB(t) - bB(t)R(t)$
$R'(t) = -dR(t) + cB(t)R(t)$
$B(0) = B_0, R(0) = R_0$

1.9 Beispiel 7: Minimalkurven

Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkte?
$E(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx + \int_a^b F * ydx$
Suche das Minimum über alle Funktionen y mit $y(a) = c$
$y(b) = d$
Störungen $\phi(x)$ mit $\phi(a) = \phi(b) = 0$
$y + \epsilon\phi$ ist ebenfalls Kurve zwischen $(0,c)$ und (b,d).
Für Minimum y gilt: $E(y) \leq E(y+\epsilon\phi), \forall epsilon > 0$
$f(\epsilon) := E(y+\epsilon\phi) hat Minimum bei \epsilon = 0.$
$\Rightarrow f'(0) = 0$
$f(\epsilon) = \int \sqrt{1+(y'+\epsilon\phi')^2} + \int F(y+\epsilon\phi)dx$
$f'(\epsilon) = \int_a^b \frac{2(y'+\epsilon\phi')\phi'}{1\sqrt{1+(y'+\epsilon\phi')^2}}dx + \int_a^b F\phi dx$
$f'(0) = \int_a^b (\frac{y'\phi'}{\sqrt{1+y'^2}}F\phi)dx$
$= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\phi|_a^b - \int_a^b \phi((\frac{y'}{\sqrt{1-y'^2}})' + F)dx$
$f'(0) = 0 => \int_a^b \phi(..)dx = 0, \forall \phi mit \phi(a) = 0, \phi(b) = 0$
$\Rightarrow (\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}})' = F$, für $x \in (a,b)$
$y(a) = c, y(b) = d$
$F = 0, \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = const$
$y'^2 = c^2(1+y'^2) \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{1-c^2}$
$y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = const \Rightarrow y$ linear

$(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}})' = \frac{y''(1+y'^2)-y'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} \Rightarrow y'' = 0$

2 Existenz und Eindeutigkeit des AWP

$x'(t) - f(x(t),t), x : [t_0,T) -> R^n, f : R^n \times [t_0,T) -> R^n$
$x(t_0) = x_0$
Suchen $x \in C^1((t_0,T))^n$

2.1 Lokale Existenz

Es existiert $T > t_0$, sodass AWP eine Lösung $x \in C^1((t_0,T))^n$
Globale Existenz: Für alle $T > t_0$ hat AWP eine Lösung $x \in C^1((t_0,T))^n$

Beispiel: $x' = x -> x(t) = x_0 e^t$, globaler Existenz
Beispiel: $x' = -e^{-x} \Rightarrow e^x x' = -1$
integriert: $e^x = -t + c, t = 0 : e^{x_0} = c$
$x = log(e^{x_0} - t)$
Nur Existenz für $t < e^{x_0}$
$t_max = e^{x_0}$

Minimalanforderung für Existenz: f stetig

2.2 Satz: Satz von Peno

Satz von Peano: f stetig $\Rightarrow$ lokale Existenz

20.30.2009

$x'(t) = f(x(t), t), t \in (t_0, T)$
$x(t_0) = x_0$
$f \in C(R^n \times [t_0, T]), x_0 \in R^n$
Suche Lösung: $x \in C((t_0, T))^n$
$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{T} f(x(s), s) ds$
$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{T} f(x(s), s) ds$
$x = F(x)$, Fixpunktgleichung
$f : C((t_0, T))^n -> C((t_0, T))^n$
$x -> x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds$
$\Rightarrow$ wohldefiniert

2.3 Schaudersche Fixpunktsatz

$F : X \to X$, sei stetig ($x_1 \to x \Rightarrow F(x_1) \to F(x)$) und kompakt ($M$ beschränkt $\Rightarrow F(M)$ präkompakt $\Rightarrow \overline{F(M)}$ kompakt) X Banachraum
D abgeschlossen und beschränkt mit $F(D) \subset D \Rightarrow$ Dann existiert ein Fixpunkt von $F \in D$, d.h.$\overline{x} \in D$ mit $\overline{x} = F(\overline{x})$

2.3.1 Anwendung auf DGL

$D = B_R(x_0) = x \in C((t_0, T))^n | ||x - x_0||_\infty \leq R$
$||x||_\infty = \sup_{t \in [t_0, T]} ||x(t)||$, (euklidische Norm, da $x(t) \in R^n$)
$||F(x) - x_0||_\infty = \sup_{t \in [t_0, T]} || \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds|| \leq \sup_t ((t - t_0) \sup_{s \in (t_0, t)} ||f(x(s), s)||) \leq \sum_t ((T - t_0) \sup_{s \in [t_0, T]} ||f(x(s), s)) =$
$(T - t_0) \sup_{s \in [t_0, T]} ||f(x(s), s)$
$||x - x_0|| \leq R$
$\sup_s ||x(s) - x_0|| \leq R$
$\forall s : ||x(s) - x_0|| \leq R$
$x(s) \in B_R^{R^n}(x_0)$

$\leq (T - t_0) \sup_{s \in [t_0, T], z} ||f(z, s)||$
$z \in B_R^{R^n}(x_0)$
f ist stetig, $B_R^{R^n}(x_0) \times [t_0, T]$ ist Kompakt in $R^{n+1} \Rightarrow$ f ist auf dieser Menge beschränkt, $\sup_{s,z} ||f(z, s)|| \leq C$
$\Rightarrow ||F(x) - x_0|| \leq (T - t_0) C(R, T) \leq R$
$lim_{T -> t_0} (T - t_0) C(R, T) = 0$

$C(R,T) = \sup_{s\in[t_0,T], z\in B_R^{R^n}(x_0)} ||f(z,s)|| \to \sup_{z\in B_R^{R^n}(x_0)} ||f(z,t_0)||$ beschränkt
$\Rightarrow \exists T > t_0$mit $(T-t_0)C(R,T) \leq R$
$\Rightarrow ||F(x)-x_0||_\infty \leq R \Rightarrow F(x) \in B_R^{R^n}(x_0)$

Kompaktheit: $x_n \in C((t_0,T))^n$ beschränkt
$\Rightarrow F(x_n) \leq C([t_0,T])^n$ hat konvergente Teilfolge

2.4 Satz von Auzela Ascoli

Die Funktionenfolge x_n hat auf einem Intervall $[t_0,T]$ eine konvergente Teilfolge in der ∞-Norm (¡⇒ gleichmäßige Konvergenz), wenn sie gleichgradig stetig ist. $\forall x_n \forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \forall x_n : |t-s| < \epsilon \Rightarrow |x_0(t) - x_n(s)| < \delta =$ gleichmäßig stetig
x_n beschränkt in $C([t_0,T])^n$
$||x_n||_\infty \leq C$
$t,s \in (t_0,T]$
$||F(x_n)(s) - F(x_n)(t)|| = ||\int_{t_0}^{s} f(x_n(\tau),\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} f(x_n(\tau),\tau)d\tau|| = ||\int_{t}^{s} f(x_n(\tau),\tau)d\tau|| \leq |t-s| \sum_{\tau\in[t,s]} ||f(x_n(\tau),\tau)|| \leq$
$|t-s| \sup_{\tau\in[t_0,T]} ||f(\underbrace{x_n(\tau)}_{\in B_c^{R^n}(0)},\tau)||$
$\leq |t-s| \sup_{\tau\in[t_0,T], z\in B_c^{R^n}(0)} ||f(z,\tau)|| \leq \tilde{C}|t-s|$
$\tilde{C}$ unabhängig von n.
$\epsilon(\delta) = \frac{\delta}{\tilde{c}}$ unabhängig von $n(x_n)$
Satz von Anzelo-Ascoli $\Rightarrow F(x_n)$ hat konvergente Teilfolge in $C([t_0,T])^n$
$\Rightarrow F$ ist kompakt, $F(B_R(x_0)) \subset B_R(x_0)$, falls $T-t_0$ hinreichend klein ist.
Schouders Fixpunktsatz $\Rightarrow x = F(x)$
$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds$, hat einen Fixpunkt in $B_R(x_0)$, falls T hinreichend klein

Fixpunkt $\overline{x}$
$\overline{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\overline{x}(s),s)dx \in C^1([t_0,T])^n$
$\overline{x}'(t) = f(\overline{x}(t),t)$
$\overline{x}(t_0) = x_0$
$\Rightarrow \overline{x}$ löst das AWP
Satz von Peano: f stetig, $x_0 \in R^n$. Dann existiert $T > t_0$, sodass das AWP eine Lösung in (t_0,T) hat.

Beispiel: $x' = x^\alpha$, $t > 0$ und $x(0) = 0$
$0 < \alpha < 1$, x^α stetig, aber keine eindeutige Lösung.

2.5 Satz von Picard-Lindelöf (globale Version)

f stetig, $x_0 \in R^n$, f Lipschitzstetig im ersten Argument, d.h. $\forall x,y \in R^n \forall t > t_0 : ||f(x,t) - f(y,t)|| \leq L||x-y||$
Dann existiert für alle $T > t_0$ eine eindeutige Lösung des AWP.
Beweis über Banach'schen Fixpunktsatz
Banach'scher Fixpunktsatz: $F : X \to X$, D beschränkt, abgeschlossen, konvex mit $F(D) \subset D$ und F sei kontraktiv, d.h. $\exists \gamma < 1 \forall x,y \in X ||F(x) - F(y)|| \leq \gamma||x-y||$

Lipschitz-stetigkeit von F
$||F(x) - F(y)||_\infty = \sup_{t\in[t_0,T]} ||\int_{t_0}^{t} (f(x(s),s) - f(y(s),s))ds|| \leq \sup_t ((t-t_0) \sup_{s\in[t_0,t]} ||f(x(s),s) - f(y(s),s)||) \leq$
$(T-t_0)\sup_{s\in[t_0,T]} ||f(x(s),s) - f(y(s),s)|| \leq$ [Lipschitzstetig] $(T-t_0)\sup_s L||x(s) - y(s)|| \leq \underbrace{(T-t_0)L}_{\gamma} ||x-y||_\infty$

Wir brauchen $\gamma < 1$, OK für $T < t_0 + 1/L$

23.10.2009

$x' = f(x,t) in (t_0,T)$
$x(0) = x_0$
$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds$

$x' = Lx \Rightarrow x = x_0 e^{Lt}, |L|$ ist Lipschitz-Konstante von $f = Lx$
$e^{-Lt}x$ ist beschränkt
$||x||_c = sup_{t\in[t_0,T]}|e^{-ct}x(t)|$
$||.||_c$ ist äquivalent zur ∞-Norm
$x^{-ct_0}||x(t)|| \geq ||e^{-ct}x(t)|| \geq e^{-cT}||x(t)||, c \geq 0$
$\Rightarrow e^{-ct_0}||x||_\infty \geq ||x||_c \geq e^{-cT}||x||_\infty$
$C([t_0,T])$ mit $||.||_c$ ist Banachraum

$$
\begin{aligned}
||F(x_1) - F(x_2)||_c &= \sup_{t\in[t_0,T]} (e^{-ct}|| \int_{t_0}^{t} (f(x_1(x),s) - f(x_2(s),s))ds|| \\
&\leq \sup_t (e^{-ct} \int_{t_0}^{t} ||f(x_1(s),s) - f(x_2(s),s)||) \\
&\leq \sup_t (e^{-ct} \int_{t_0}^{t} L||x_1(s) - x_2(s)||ds) \\
&= \sup_t (e^{-ct} \int_{t_0}^{t} Le^{cs} \underbrace{(e^{-cs}||x_1(s) - x_2(s)||)}_{\leq sup_{\tau\in[t_0,T]}(e^{-c\tau}||x_1(\tau)-x_2(\tau)||)=||x_1-x_2||_c}) \\
&\leq \sup_t (e^{-ct} \int_{t_0}^{t} Le^{cs}||x_1 - x_2||_c ds) \\
&= \sup_{t(e^{-ct}L1/c(e^{ct}-e^{-ct_0})||x_1-x_2||_c)} \\
&= L/c||x_1 - x_2||_c \sup_t (1 - e^{c(t_0-t)}) \\
&= L/c||x_1 - x_2||_c (1 - e^{c(t_0-T)})
\end{aligned}
$$

$\gamma = L/c(1 - e^{c(t_0-T)})$
< 1 für $c \geq L$
$\gamma = 1 - e^{L(t_0-T)} < 1$ für $c = L$
$\Rightarrow F$ ist kontraktiv
F bildet $B_R(x_0) = \{x \in C([t_0,T])^n : ||x - y_0||_c \in R\}$ in sich selbst ab
$||F(x) - x_0||_c = \sup_{t\in[t_0,T]} e^{-ct}|| \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds||$
$= \sup_t (e^{-ct}|| \int_{t_0}^{t} (f(x(s),s) - f(x_0,s))ds + \int_{t_0}^{t} f(x_0,s)ds||)$
$\leq \sup_t (e^{-ct}(\int_{t_0}^{t} ||f(x(s),s) - f(x_0,s)||ds + \int_{t_0}^{t} ||f(x_0,s)||ds))$
$\leq \sup_t e^{-ct} \int_{t_0}^{t} ||f(x(s),s) - f(x_0,s)||ds + \underbrace{e^{-ct_0} \int_{t_0}^{T} ||f(x_0,s)||ds}_{=:A}$
$\leq \gamma||x - x_0||_c + A$
$\leq \gamma R + A \leq R$
erfüllt für $R \geq \frac{A}{1-\gamma}$
Voraussetzung des Banach'scher Fixpunktsatzes erfüllt auf $B_R(x_0) \Rightarrow F$ hat einen eindeutigen Fixpunkt $\overline{x}$und$\overline{x} \in B_R(x_0)$
$\Rightarrow \overline{x}' = f(\overline{x},t), t \in [t_0,T]$
$\overline{x}(t_0) = x_0 \overline{x} \in C^1([t_0,T])$

Was passiert, wenn f nun lokal Lipschitz-stetig ist? f stetig diffbar bzgl. x
$L_M = \sup_{||\partial_x f(x,..)||}$
lokale Lipschitz-Konstante in M
$f(x_1), f(x_2) = \partial_x f(\xi)(x_1 - x_2), \xi \in [x_1, x_2]$
$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq ||\partial_x f(\xi)||||x_1 - x_2|| \leq L_M||x_1 - x_2||$ für alle $x_1, x_2 \in M$

$\partial_x f$ stetig, f stetig
$\Rightarrow$ (i) es gibt $T > t_0$, sodass die Lösung in $[t_0,T]$ existiert.
(ii) Es gibt höchstens eine Lösung.
Beweis von (ii) Angenommen, x_1 und x_2 sind Lösungen mit $x_1 \neq x_2, x_1(t_0) = x_0 = x_2(t_0)$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \tau \geq t_0$, so dass $x_1(t) \neq x_2(t)$ in $(\tau, \tau+\epsilon)$ und $x_1(t) = n_2(t)$ in $[t_0, \tau]$
$t > \tau : x_1(t) = x_1(\tau) + \int_\tau^t f(x_1(s), s)ds$
$x_2(t) = x_2(\tau) + \int_\tau^t f(x_2(s), s)ds$
$||x_1(t) - x_s(t)|| = || \int_\tau^t f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)ds||$
$\leq \int_\tau^t ||f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)||ds$
$= \int_\tau^t ||\partial_x f(\xi(s), s)(x_1(s) - x_2(s))||ds$
$||x_1(t) - x_2(t)|| \leq \int_\tau^t ||\partial_x f(\xi(s), s)|| - \sup_{\sigma\in(\tau,t)} ||x_1(\sigma) - x_2(\sigma)||ds$
$= \int_\tau^{\tau+\epsilon} ||\partial_x f(\xi(s), s)||ds \sup_{\sigma\in[\tau,\tau+\epsilon]} ||x_1(\sigma), x_2(\sigma)||$
$||x_1 - x_2||_\infty = \underbrace{\int_\tau^{\tau+\epsilon} ||\partial_x f(\xi(s), s)||ds}_{\to 0 \text{ für } \epsilon\to 0, <1 \text{ für } \epsilon \text{ hinreichend klein}} ||x_1 - x_2||_\infty$
ϵ hinreichend klein $\Rightarrow ||x_1 - x_2||_\infty < \eta||x_1 - x_2||_\infty \Rightarrow x_1 = x_2$ auf $(\tau, \tau+\epsilon)$ Widerspruch, da $\eta < 1$
$\Rightarrow$ es gibt kein solches τ
$\Rightarrow x_1 = x_2$ für alle t.

Beweis: (i) $M(R,T) := \sup_{z\in B_R^{R^n}(x_0), t\in[t_0,T]} ||\partial_x f(z,t)$
$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$
$||F(x_1) - F(x_2)|| = \sup_t || \int_{t_0}^t (f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s))ds|| \leq \sup_t \int_{t_0}^t ||\partial_x f(\xi(s), s)(x_1(s) - x_2(s))||ds$
$\leq \sup_t \int_{t_0}^t \underbrace{||\partial_x f(s,s)||}_{\leq \sup_{z\in B_R} ||\partial_x f(z,s)|| \leq M(R,T)} ds||x_1 - x_2||_\infty$
$x_1, x_2 \in B_R(x_0)$
$\xi(s) \in [x_1, x_2] \Rightarrow \xi(s) \in B_R^{R^n}(x_0)$
$\leq \sup_t \int_{t_0}^t M(R,T)ds||x_1 - x_2||_\infty$
$\leq (T - t_0)M(R,T) * ||x_1 - x_2||_\infty$

3 Stabilität von DGL

Verschiedene Begriffe

3.1 Kondition

Änderung von x bezüglich der Eingabe
$-x \in R^n$
$-f : R^n \times [t_0, T] \to R^n$
vgl. $||x - \tilde{x}||zu||(x_0, f) - (\tilde{x}_0, \tilde{f})||_?$

$x' = f(t)$
$x(t)0x_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds$
$x(t) - \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^t (f(s) - \tilde{f}(s))ds$
∞-Norm für x und f
$||x - \tilde{x}||_\infty \leq ||x_0 - \tilde{x}_0|| + (T - t_0)||f - \tilde{f}||_\infty$
∞-Norm für x, x', ∞-Norm
$||x||_{c_1} = max||x||_\infty, ||x'||_\infty$
$||x' - \tilde{x}'||\infty = ||f - \tilde{f}||_\infty$
Fehler in der Krümmung (x''), $||x||_{C^2} = max||x||_\infty, ||x'||_\infty, ||x''||_\infty$
nur sinnvoll für $f \in C^1$
$x'' = f'$
$||x'' - \tilde{x}''||_\infty \leq ||f' - \tilde{f}'||_\infty \to$ Stabilität f gemessen in C^1

Stabilität auch oft Verhalten von x für $t \to \infty$ Stabilität von Fixpunkten, $x' = f(x), f(\overline{x}) = 0, \overline{x} \in R^n$
x stabil, wenn $x(t) \to \overline{x}$ für x_0 hinreichend nahe bei $\overline{x}$

27.10.3009

3.2 Einschrittverfahren für gewöhnliche DGL

Motivation: $x' = f(t,x), x(t_0) = x_0$, AWA
Problem: Wir können die Lösung nicht analytisch berechnen
$\Rightarrow$ **Lösung:** approximiere die Lösung $x \in C^1([0,T], R^d)$ mit Hilfe von numerischen Verfahren.

3.2.1 Eulersches Polygonzugverfahren(*1726*)

1. Schritt: Lege durch $P_1 = (t_0, x_0)$ eine Tangente mit der Steigung $m_0 = f(t_0, x_0)$

2. Schritt: Gehe entlang dieser Tangente $t_1 = t_0 + \tau_0, x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)$

3. Schritt: Berechne Tangente im Punkt $(t_1, x_1) m_1 := f(t_1, x_1)$

Allgemeine Methode bei **Einschrittverfahren** (**ESV**)
Zerlege das Zeitintervall $[z_0, T]$ in $n+1$ gewählte Zeitschritte
hier nicht äqudistante Schrittweiten: $t_{j+1} = t_j + \tau_j, j = 0, .., n_\delta - 1$
Gitter $\delta = t_0, .., t_n, t_j =$ Gitterpunkte
Definiere: (Feinheit des Gitters)
$\tau_\delta = \max_{0 \le j \le n_{\delta-1}} |\tau_j|$
Es numerisches Verfahren findet so ein Δ und ordnet diesem Gitter eine Gitterfunktion $y_D : \Delta \to R^d$ zu. Es soll gelten: $x_\Delta \approx x(t) \forall t \in \Delta$
Wir bestimmen x_D rekursiv: (2-Term-Rekursion)

(i) $x_D(t_0) = x_0$
(ii) $x_D(t_{j+1}) = x(t_j) + \tau_j * \psi(t_j, x_\Delta(t_j), \tau_j)$

mit $\psi(t,x,\tau)$ Verfahrensfunktion/Schrittfunktion
explizites Eulerverfahren: $\psi(t,x,\tau) = f(t,x)$

(i) $x_\Delta(t_0) = x_0$
(ii) $x_\Delta(t_{j+1}) = x_D(t_j) - \tau_j f(t_j, x_\Delta(t_j))$

Beispiel: $x' = 1 + x^2 = f(t,x) \Rightarrow x(t) = tan(x)$
$x(0) = 0$
$I = [0; 0.5]$
$S = 0.1$

j	t_j	$x_D(t_j)$	$x(t_j)$
0	0	0	0
1	0.1	0.1	0.1003
2	0.2	0.201	0.2027
3	0.3	0.3050	0.3093
4	0.4	0.4193	0.4228
5	0.5	0.5315	0.5463

Idee von ESV: $x(t_{j+1}) x(t_{j+1})$ berechnet man mit Hilfe von $x(t_j)$
Idee von MSV: $x(t_{j+1}) x(t_{j+1})$ berechnet man mit Hilfe von $x(t_j), x(t_{j-1}$,...

3.3 Konsistenz

Sei x die Lösung des AWP und Ψ Verfahrensfunktion, dann heißt $\tau(t_i, x(t_i), \tau_i) = \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\tau_i} - \psi(t_i, x(t_i))$, Verfahrensfehler/Konsistenzfehler an der Stelle $(t_i, x(t_i))$
Das KF/VF gib an, wie gut die exakte Lösung das Einschrittverfahren erfüllt.

3.3.1 Definition: Konsistenz

Ein Verfahren heißt konsistent, wenn $r(t, x(t), \tau) \to 0$ für $\tau \to 0$
Ein Verfahren heißt konsistent von der Ordnung p, wenn $\tau(t_i, x(t_i), \tau_i) = O(\tau_i^p)$

Berechnung der Konsitenzordnung mit Hilfe Taylor-Entwicklung.
(*) $\tau(t_i, x(t_i), \tau_i) = \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\tau_i} - \psi(t_i, x(t_i), \tau_i)$
Taylorentwicklung von $x(t_{i+1}) = x(t_i + \tau_i) = x(t_i) + \frac{x'(t_i)}{1!}\tau_i + \frac{x''(t_i)}{2!}\tau_i^2 + O(\tau^3)$
Einsetzen in (*) : $x(t_i)\tau_i/\tau_i + \frac{x''(t_i)*\tau_i^2}{2\tau_i} + ... - \psi(t_i, x(t_i), \tau_i)$
$x' = f(x, t(x)), x'' = f_t(t, x) + f_x(t, x) * f$
$f(t_i, x(t_i)) + 1/2(f_t + f_x f(t_i, x(t_i)))\tau_i + y(t_i, x(t_i), \tau_i)$
für das explizite Eulerverfahren. $\Psi(t_i, x(t_i), \tau_i) = f(t_i, x(t_i), \tau_i)$
$\Rightarrow \tau(t_i, x(t_i), \tau_i) = \tau/2(f_t + f_x f(t_i, x(t_i) + .. = \sigma(\tau^1)$
$\Rightarrow p = 1 \Rightarrow$ das explizite Eulerverfahren ist Konsistent von der Ordnung 1.
Konstruktion von Verfahren hoher Ordnung
Idee: verwende die Taylorentwicklung 2. Ordnung:
$\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\tau_i} = f(t_i, x(t_i)) + 1/2(f_t + f_x f)(t_i, x(t_i), \tau_i) - \tau_i$
$\Rightarrow x(t_{i+1}) = x(t_i) + \tau_i f(t_i, x(t_i)) + \tau_i^2/2(f_t + f_x f)(t_i, x(t_i))$
Verfahren der Konsitenzordnung 2

Beispiel: $x' = x = f(t, x)$
$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \tau x(t_i) + \tau^2/2(x'(t) + 1x(t)) = x(t_i) + \tau_i(x(t_i)) + \tau_i^2(x(t_i))$
$\Psi(t, x(t)) = f(x, t) + \tau/2(f_t + f_x f)(t, x)$
Ansatz für ein Verfahren 2.Ordnung

Konvergenz
Fehler von x zu x_Δ (Rückwärtsanalyse)

3.3.2 Definition: Gitterfehler

Den Vektor der Approximationsfehler auf dem Gitter Δ bezeichnen wir mit $\epsilon_\Delta : \Delta \to R^d$ mit $\epsilon_\Delta^{(t)} = x(t) - x_\Delta(t) \forall t \in \Delta$
Diskretisierungsfehler auf $||\epsilon_\Delta||_\infty = max_{t\in\Delta}|\epsilon_\Delta(t)|$

3.3.3 Definition(Konvergenz)

Zu jedem Gitter Δ auf $[t_0, T]$ mit τ_Δ hinreichend klein. sei eine Gitterfunktion x_Δ gegeben.
Die Familie dieser Gitterfunktionen konvergiert gegen die Lösung $x \in C^1([t_0, T], R^d)$, wenn für den Diskretisierungsfehler gilt, $||\epsilon_\Delta||_\infty \to 0$ für $\tau_\Delta \to 0$
Sie konvergiert von der Ordnung p, wenn gilt $||\epsilon_D||_\infty = O(\tau^p)$ für $\tau_\Delta \to 0$

Konvergenzsatz für das ESV Die Verfahrensfunktion $\psi(t, x, \tau)$ sei bzgl. x Lipschitzstetig auf dem Gebiet Ω. Dann ist das ESV- konsistent (mit der Ordnung P), so ist das ESV konvergent(mit der Ordnung P)

30.30.2009

$x' = f(x, t)$
$x(t_0) = x_0$

$x_\Delta(t_{j+1}) = x_\Delta(t_j) + \tau_j \psi(\tau_j, x_\delta, \tau_j)$
$\Delta = t_0, .., t_n = T$
$\tau_j = t_{j+1} - t_j$
$x(t_{j+1}) = x(t_j) + \tau_j 1/\tau_j (\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x(t), t)dt)$
Euler, τ_j klein
$1/\tau_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(x(t), t)dt \approx f(x_0(t), t)$

lokaler Konsistenzfehler
$r(t, x, \tau) = \frac{xt_{i+1} - x(t_i)}{\tau_i} - \phi(t_i, x(t_i), \tau_i)$
$x' = f(x(t), t), x(t_{i+1}))x(t_i) + x'(t_i)\tau_i + 1/2x''(t_i)\tau_i^2 + 1/6x'''(t_i)\tau_i^3 + ...$
$= x(t_i) + f(x(t_i), t_i)\tau_i + 1/2\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)f(x(t_i), t_i)\tau_i^2 + 1/2\frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i)\tau_i^2 + ...$
$x'' = d/dt(f(x(t), t)) = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}f + \frac{\partial f}{\partial t}$
Konvergenz:
$\epsilon_\Delta := x(t) - x_\Delta(t), t \in \Delta$

Diskretisierungsfehler:
$||\epsilon_\delta||_\infty = max_{t \in \Delta}|\epsilon_\Delta(t)|$
Konvergenz: $||\epsilon_\Delta||_\infty \to 0$ für $\tau_\Delta \to 0$
Konverzenzordnung: $||\epsilon_\Delta||_\infty = O(\tau_\Delta^P)$

Konvergenz = Konsistenz + Stabilität

Prinzip für lineare Gleichungen: $A \in R^{n \times n}, A^{-1}$ existiert
$Ax = b$, $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$
Konsistenzfehler $r = \tilde{A}x - \tilde{b}$
Konvergenz $= \epsilon = x - \tilde{x}$
$\tilde{A}(x - \tilde{x}) = \tilde{A}x - \tilde{b} = r$
$\Rightarrow x - \tilde{x} = \tilde{A}^{-1} * r \Rightarrow$ $\underbrace{||x - \tilde{x}||}_{\text{Konvergenazfehler}} \leq \underbrace{||\tilde{A}^{-1}||}_{\text{Stabilitätskonstante}} * \underbrace{||r||}_{\text{Konsistenzfehler}}$
$\frac{x(t_{j+1}) - x_\Delta(t_{j+1})}{\tau_j} - \frac{x(t_j) - x_\Delta(t_j)}{\tau_j} - (\psi(t_j, x(t_j), \tau_j) - \psi(t_j, x_\Delta(t_j), \tau_j))$
$= \frac{x(t_j) - x(t_j)}{\tau_j} - \psi(t_j, x(t_j), \tau_j)$
$= r(t_j, x, \tau_j)$

Brauchen noch diskrete Stabilitätsabschätzung
$(x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}) - (x_j - \tilde{x}_j) - (\psi_j(x_j) - \psi_j(\tilde{x})) = r_j$
$max_j||x_j - \tilde{x}_0|| \leq Cmax_k||r_k||$
Entsprechendes Problem für Dgl:
$x' - \tilde{x}' - (f(x, t) - f(\tilde{x}, t)) = r$
möchten: $||x - \tilde{x}||_\infty \leq C||r||_\infty$
f Lipschitz nach x
$x(t) - \tilde{x}(t) = \int_{t_0}^t (f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s))ds + \int_{t_0}^t r(s)ds$
$||x(t) - \tilde{x}(t)|| = ||\int .. + \int ..|| \leq ||\int ..|| + ||\int ..|| \leq \int_{t_0}^t ||f(x(s), s) - f(\tilde{x}(s), s)ds + \int_{t_0}^t ||r(s)||ds$
$\leq \int_{t_0}^t L||x(s) - \tilde{x}(s)||ds + \int_{t_0}^t \underbrace{||r(s)||}_{\leq B = max_{s \in [t_t, T]}||r(s)||} ds$
$e(t) = L\int_{L_0}^t e(s)ds + \int_{t_0}^t Bds$

Motivation: $e(t) = L * \int_{t_0}^t e(s)ds + \int_{t_0}^t Bds$
$e' = Le + B$
$(e + B/L)' = L(e + B/L)$
$\Rightarrow e(t) + B/L = e^{LT}(e(0) + B/L) = B/Le^{Lt}$

Substitution: $f(t) = e(t)e^{-Lt}$ $e(t) = e^{Lt}f(t)$
$e^{Lt}f(t) \leq L\int_{t_0}^t e^{Ls}f(s)ds + \int_{t_0}^t Bds$

$f(t) \leq L \int_{t_0}^{t} e^{L(s-t)} \underbrace{f(s)}_{\leq max_{s\in[t_0,t]} f(s)} ds + e^{-Lt} \int_{t_0}^{t} B ds$
$\leq (\max_{s\in[t_0,t]} f(s))(1e^{L(t_0,t)}) + e^{-Lt} \int_{t_0}^{t} B ds$
$f(t) \leq (max_{s\in[t_0,T]} f(s))(1 - e^{-L(T-t_0)}) + e^{-Lt}(T-t_0)B$
$\Rightarrow max_{t\in[t_0,T]} f(t) \leq (\max_{t\in[t_0,T]} f(t))(1 - e^{-L(T-t_0)}) + e^{-Lt}(T-t_0)B$
$max_{t\in[t_0,T]} e^{-L(T-t_0)} \leq e^{-Lt}(T-t_0)B$
$max f(t) \leq e^{Lt-2Lt_0}(T-t_0)B$
$max_t e(t) = max_t \underbrace{e^{Lt}}_{\leq E^{LT}} f(t) \leq e^{LT} max_t f(t) \leq e^{2L(T-t_0)}(T-t_0)B$
$\Rightarrow max_t ||x(t) - \tilde{x}(t)|| \leq ((T-t_0)e^{2L(T-t_0)}) max_t ||r(t)||$

3.4 Lemma von Gronwall

$e(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)e(s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s)ds$
$\Rightarrow e(s) \leq e(0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}ds$
$(A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds)$
Differenzenverfahren
$(x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}) - (x_j - \tilde{x}_j) = \psi_j(x_j) - \psi_j(\tilde{x}_j) + r_j$
Summation über j von 0 bis $(k-1)$ Teleskopsumme
$(x_k - \tilde{x}_k) - (x_0 - \tilde{x}_0) = \sum_{j=0}^{k-1} (\Psi_j(x_j) - \Psi_j(\tilde{x}_j)) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j$
Dreiecksungleichung:
$\Rightarrow ||x_k - \tilde{x}_k|| \leq \sum_{j=0}^{k-1} ||\Psi_j(x_j) - \Psi_j(\tilde{x}_j)|| + \sum_{j=0}^{k-1} ||r_j||$
$\Psi_j(x_j) = \tau_j \Psi(t_j, x_j, \tau_j)$
Ψ soll f approximieren
Annahme: Ψ Lipschitz-stetig bzgl. x
$||\Psi(t,x,\tau) - \Psi(x,y,\tau)|| \leq \tilde{L}||x-y|| \forall t, \forall \tau > 0$
$\Rightarrow ||\Psi_j(x_j) - \Psi_j(\tilde{x}_j)|| = \tau_j ||\Psi(t_j, x_j, \tau_j) - \Psi(t_j, \tilde{x}_j, \tau_j)|| \leq \tau_j \tilde{L} ||x_j - \tilde{x}_j||$
$\underbrace{||x_k - \tilde{x}_k||}_{=:e_k} \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j \tilde{L} \underbrace{||x_j - \tilde{x}_j||}_{e_j} + \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j \underbrace{||r(t_j, x, \tau_j)||}_{=B}$
Konsistenzfehler $B = max_j ||r(t_j, x, \tau_j)||$
$f_k = e_k e^{-L(t_k - t_0)}$
$e^{L(t_k-t_0)} f_k \leq \sum_{j=0}^{k-1} L\tau_j e^{L(t_j-t_0)} f_j + B \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \tau_j}_{=t_{j+1}-t_j = t_k - t_0 \leq T - t_0}$
$f_k \leq L \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j e^{L(t_j - t_k)} + B(T-t_0)e^{-L(t_k-t_0)}$
$f_k \leq L(\sum \tau_j e^{L(t_j-t_k)}) \max_j f_j + B(T-t_0)e^{-L(t_k-t_0)}$

03.11.2009

$x' = f(x,t), x(0) = x_0$
$\tilde{x}(t_{j+1}) = \tilde{x}(t_j) + \Delta\Psi(t_j, \tilde{x}(t_j), \tau_j)$
Fehler: $e_j = x(t_j) - \tilde{x}(t_j)$
$\frac{e_{j+1}-e_j}{\tau_j} - (\Psi(t_j, x(t_j), \tau_j)) - \Psi(t_j, \tilde{x}(t_j), \tau_j) - r(t_j, x, \tau_j)$
$||e_k|| \leq L \sum_{j=0}^{k-1} ||e_j|| \tau_{j-1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \tau_j r(t_j, x, \tau_j)}_{\leq (\sum \tau_j) B \leq (T-t_0)B}$
$B := \max_j |r(t_j, x, \tau_j)|$
$f_k := ||e_k|| e^{-L(t_k-t_0)}, ||e_k|| = f_k e^{L(t_k-t_0)}$
$\Rightarrow f_k e^{L(t_k-t_0)} \leq L \sum_{j=0}^{k-1} f_j e^{L(t_j-t_0)} \tau_j + r(T-t_0)B$

$\tau_j e^{L(t_j-t_0)} \leq \sum_{t_j}^{t_{j+1}} e^{L(t-t_0)}dt$

$f_k \leq L\sum_{j=0}^{k-1} f_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^L(t-t_k)dt + (T-t_0)e^{-L(t_k-t_0)}$

$= \sum_{j=0}^{k-1} f_j(e^{L(t_{j+1}-t_k)} - e^{L(t_j-t_k)}) + (T-t_0)e^{-L(t_k-t_0)}B$

$f_j \leq \max_{0\leq i\leq k} f_i$

$f_k \leq \max_i f_i \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{(e^{L(t_{j+1}-t_k)} - e^{L(t_j-t_k)})}_{=1} + (T-t_0)e^{-L(t_k-t_0)}$

$f_k \leq \max_i f_i(\underbrace{1-e^{L(t_0-t_k)}}_{\leq 1-e^{L(t_0-T)}}) + (T-t_0)\underbrace{e^{L(t_0-t_k=)}}_{\leq 1}B$

$f_k \leq (1-e^{L(t_0-T)})maxf_i + (T-t_0)B$

$\Rightarrow e^{L(t_0-T)}max_k f_k \leq (T-t_0)B$

$max_k f_k \leq (T-t_0)e^{L(T-t_0)}B$

$\max_k ||e_k|| = max_k f_k e^{L(t_k-t_0)} \leq e^{L(T-t_0)}max_k f_k$

$\leq (T-t_0)e^{2L}(T-t_0)B$

L = Lipschitzkonstante von Ψ

Konvergenzfehler $\leq C(\tilde{L},T)$ Konsistenzfehler $\Rightarrow$ Konvergenzordnung = Konsistenzordnung

Unterscheidung nach Stabilitätskonstante C

-"Steife Dgl" für $C \gg 1$

-"nicht steift" wenn $C \approx e^{L(T-t_0)}$ für L Lipschitzkonstante von f)

3.5 Steifheit bzgl. Anfangswert

Kondition der Dgl. = kleinste Zahl κ mit $||x_1(t) - x_2(t)|| \leq \kappa||x_1(t_0) - x_2(t_0)||\forall t \in [t_0, T]$

Diskrete Kondition:(x_i^Δ aus Einschrittfunktion mit Gitter Δ)

$||x_1^\Delta - x_2^\Delta(t)|| \leq \kappa_\Delta||x_1^\Delta(t_0) - x_2^\Delta(t_0)||\forall t \in \Delta$

„Steifes Problem" $\kappa^\Delta \gg \kappa$

„nicht steifes Problem" $K^\Delta \approx \kappa$

(Beachte $\kappa^\Delta \to \kappa$ für $\tau_\Delta \to 0$)

Übungsaufgabe 3b: $y(0) = 1$

Beispiel: $x' = \lambda x, x(0) = 1$

$\Delta = 0, \tau, 2\tau, ..$

$x(t) = e^{\lambda t}$

Startwert $x^i(0) \to x^i(0)e^{\lambda t}$

$||x^1(t) - x^0(t)|| = ||e^{\lambda t}(x^1(0) - x^2(0))|| \leq e^{\lambda t}||x^1(0) - x^2(0)||$

$\kappa = \max : t \in [0,T]e^{\lambda t} = \begin{cases} e^{\lambda T} & \lambda > 0 \\ 1 & \lambda \leq 0 \end{cases}$ Eulerverfahren: $\tilde{x}(t-\tau) = \tilde{x}(t) + \tau\lambda\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t)(1+\lambda\tau)$

$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}(0)(1+\tau\lambda)$

$\tilde{x}(\lambda\tau) = \tilde{x}(\tau)(1+\tau\lambda) = \tilde{x}(0)(1+\lambda\tau)^2$

$\tilde{x}(\kappa\tau) = \tilde{x}(1+\tau\lambda)^2$

$\lambda \geq 0 : K_\Delta = (1+\tau\lambda)^n = (1+\lambda T/n)^n \to e^{\lambda T}$

$\Rightarrow \kappa_\Delta \leq \kappa \to$ nicht steif

$\lambda \leq 0 : \tilde{x}(\kappa\tau) = \tilde{x}(1+\tau\lambda)^k$

$|\tilde{x}^1(k\tau) - \tilde{x}^2(\kappa\tau)| = |(1+\tau\lambda)^k(\tilde{x}^1(0) - \tilde{x}^2(0))| = \begin{cases} (1+\tau\lambda)^k|\tilde{x}^1(0) - \tilde{x}^2(0)| & \lambda\tau > -1 \\ (\tau|\lambda| - 1)^k|..| & \tau\lambda \leq -1 \end{cases}$

$\lambda\tau > -2\tau|\lambda| < 2$

$(1+\tau\lambda)^k \leq 1, \tau\lambda > -1$

$(\tau|\lambda| - 1)^k \leq 1, -2 < \tau\lambda \leq -1$

$|\tilde{x}^1(k\tau) - \tilde{x}^2(\kappa\tau)| \leq |\tilde{x}^1(0) - \tilde{x}^2(0)| \Rightarrow \kappa_\Delta \leq 1 \leq \kappa$

$\tau > 2/(|\lambda|), \kappa_\Delta = max_k(\tau|\lambda| - 1)^k = (\tau|\lambda| - 1)^n \gg 1 = \kappa$

3.5.1 Beispiel: Implizites Eulerverfahren

$x(t+\tau) = x(t) + \tau f(x(t+\tau), t+\tau)$
$x(t+\tau) = x(t) + \tau\lambda x(t+\tau)$
$x(t+\tau) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1-\tau\lambda}}_{>1 \text{ für } \lambda<0}}_{<1 \text{ für jedes } \tau} x(t)$

3.6 4.2 Explizite Runge-Kutta Verfahren

Eulerverfahren: $\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = f(x(t),t)$
$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = \underbrace{x'(t)}_{f(x(t),t)} + 1/2 \underbrace{x''(t)}_{\partial_t f + \partial_x f x' = \partial_t f + f\partial_x f} \tau + 1/6 \underbrace{x''(t)}_{=\partial_{tt} f + 2\partial_{xt} f f + f\partial_{xx} f f + \partial_t f \partial_x f + \partial_x f f \partial_f} \tau^2 + ...$
Modifiziertes Eulerverfahren(Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung)
$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = 1/2 f(\underbrace{x(t) + \tau/2 f(x(t),t)}_{\approx x(t+\tau/2)}, t+\tau/2)$
RK mit Stufe s: $\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$, b_i Koeffizienten, k_i verschachtelte Funktionswerte
$K_1 = f(x(t),t)$
$K_i = f(x + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t + c_i \tau)$
$[K_2 = f(x + \tau a_{21} k_1, t + c_2 \tau]$
Freiheitsgrade $A = (a_{ij}), b = (b_i) c = (c_i)$
Butcher-Schema

c	A
	b^T

10.11.2009

7 Mehrschrittverfahren für AWP

$x' = f(x,t), x(t_0) = x_0$
Runge-Kutta Ordnung p : p-malige Auswertung von f

Verfahren der Ordnung p mit nur einmaligem Auswerten der Funktion f. in jedem Zeitschnitt.

7.1 Mehrschrittverfahren auf äquidistanten Gittern

$\Delta = t_j, t_j = t_0 + j\tau, j = 0, .., n, \tau = \frac{T-t_0}{n}$
Wollen nun $f(x_\Delta(t_j), t_j)$ auswerten
Beispiel 7.1 Motivation 1:
explizites Euler: $x_\Delta(t_{j+1}) = x_\Delta(t_j) + \tau f(x_\Delta(t_j))$
implizieres Euler: $x_\Delta(t_j) = x_\Delta(t_{j-1}) + \tau f(x_\Delta(t_j), t_j)$
Mittelung: $1/2 x_\Delta(t_{j+1}) + 1/2 x_\Delta(t_j) = 1/2 * (x_\Delta(t_j) + \tau f(x_\Delta(t_j))) + 1/2 (x_\Delta(t_{j-1}) + \tau f(x_\Delta(t_j), t_j))$
$\frac{x_\Delta(t_{j+1}) - x_\Delta(t_{j-1})}{2\tau} = f(x_\Delta(t_j), t_j)$
Zentralen Differenzenquotient
Taylor $\frac{x(t_{j+1})-x(t_{j-1})}{2\tau} - x'(t_j) = \frac{(x_(t_{j+1}) - x'(t_j)\tau - x(t_j)) - (x(t_{j+1}) + x'(t_j)\tau - x(t_j))}{2\tau} = \frac{(1/2x''(t_j)\tau^2 + O(\tau^3)) - (1/2x''(t_j)(-\tau)^2 + O(\tau^3))}{2\tau} =$
$O(\tau^2)$
Konsistenzordnung 2
$\rightarrow$ Mehrschrittverfahren $x_\Delta(t_{j+1})$ berechnet aus $x_\Delta(t_j), x_\Delta(t_{j-1})$
? Stabilität
Eventueller Nachteil: mehr Speicherbedarf (bei zentralem Differenzenqoutient doppelt)
Motivation 2:

$x(t_{j+1}) = x(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x(t),t)dt$
Mittelpunktsregel:
$\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x(t),t)dt \approx 2\tau f(x(t_j),t_j)$
Beispiel: 7.2: Milne-Simpson Verfahren (Simpsom-Regel für die Quadratur)
$x(t_{j+1}) = x_{t_{j-1}} + \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x(t),t)dt$
Simpson-Regel: $\int_a^b g(t)dt = \frac{b-a}{6}(g(a) + g(b) + 4g(\frac{a+b}{2}))$
$x_\Delta(t_{j+1}) = x_\Delta(t_{j-1}) + \tau/3(f(x_\Delta(t_{j-1}),t_{j-1}) + f(x_\Delta(t_{j+1}),t_{j+1}) + 4(x_\Delta(t_j),t_j))$
Konsistenzordnung 4, implizit
Allgemeines Lineares Mehrschrittverfahren k-ter Ordnung (k-Schrittverfahren)
$\alpha_k x_\Delta(t_{j+k}) + .. + \alpha_0 x_\Delta(t_j) = \tau(\beta_k f(x_\Delta(t_{j+k}),t_{j+k}) + .. + \beta_0 f(x_\Delta(t_j),t_j))$
$f_\Delta(t_j) := f(x_\Delta(t_j),t_j)$
VS: $|\alpha_n| + |\beta_k| > 0$
$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$
Meist: $\alpha_k \neq 0$, Normierung $\alpha_k = 1$
$\beta_k = 0$: explizit
$\beta_k \neq 0$: implizit

Wohldefiniertheit von Mehrschrittverfahren

- Brauchen zusätzliche Anfangswerte $x_\Delta(t_0)$, $\underbrace{x_\Delta(t_1),..,x_\Delta(t_{k-1})}_{\text{Berechnet mit Einschrittverfahren}}$
- $\beta_k = 0$ induktiv
$\underbrace{x_\Delta(t_{j+k})}_{\text{wohldefiniert}} = \frac{1}{\alpha_k} \underbrace{(...)}_{\text{abhängig von } x_\Delta(t_{j+k,1}),..,x_\Delta(t_j)}$
- $\beta_k \neq 0 : x_\Delta(t_{j+k}) = \tau\beta_k/\alpha_k f(x_\delta(t_{j+k}),t_{j+k}) + \underbrace{R_j}_{\text{abhängig von } x_\Delta(t_{j+k,1}),..,x_\Delta(t_j)}$
Gleichung: $x = F_j(x) = \tau\beta_k/\alpha_k f(x,t_{j+k}) + R_j$
Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes:
Lemma: 7.2 f: $R^d \times R \to Rstetig, Lipschitzbzgl.x||f(x,t) - f(y,t)|| \leq L||x-y||\forall t, \forall x,y \in R^n, \tau < 1/L\frac{|\alpha|}{|\beta_n|}$
Dann existiert eine eindeutige Lösung von $x = F_j(x)$ d.h. $x_\Delta(t_{j+k})$ ist wohldefiniert.
Beweis: Banach FP:
$||F_j(x) - F_j(y)|| = ||\tau\frac{\beta_k}{\alpha_k}(f(x,t_{j+k}) - f(y,t_{j+k}))|| = \tau\frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|}|f(x,t_{j+k}) - f(y,t_{j+k})|| \leq \tau\frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|}L||x-y||$
F_j konstruktiv auf R^n, wenn $\tau\frac{|\beta_n|}{|\alpha_n|}L < 1\square$
Notation: Shiftoperator E
$E(x_\Delta(t_j)) = (x_\Delta(t_{j+1}))$
$E^2(x_\Delta(t_j)) = (x_\Delta(t_{j+2}))$
..
$E^k(x_(t_j)) = (x_\Delta(t_{j+k}))$
Mehrschrittverfahren:
$(\alpha_k E^k + \alpha_{k-1}E^{k-1} + .. + \alpha_1 E + \alpha_0 I)x_\Delta(t_j) = \tau(\beta_k E^k + .. + \beta_1 E + \beta_0 I)f_\Delta(t_j)$
charakteristische Polynome:
$\rho(z) : 0\alpha_k z^k + \alpha_{k-1}z^{k-1} + .. + \alpha_0$
$\sigma(z) := \beta_k z^k + \beta_{k-1} + ... + \beta_0$
$\rho(E)x_\Delta = \tau\sigma(E)f_\Delta$
expl. $\rho(z) = z - 1, \sigma(z) = 1$
impl. Euler:$\rho(z) = z - 1, \sigma(z) = z$

Mittelpunktsregel: $\rho(z) = z^2 - 1, \sigma(z) = 2z$
Milne-Simpson. $\rho(z) = z^2 - 1, \sigma(z) = 1/3(z^2 + 4z + 1)$
Extended: Laplace-Transformation:
lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten
$\alpha_k x^{(k)} + ... + \alpha_1 x' + \alpha_0 x = g(t), t \in R^+$
$(Lx)(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$
$(Lx')(s) = \int_0^\infty e^{-st}x'(t)dt = e^{-st}x|_0^\infty - s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt}_{Lx}$

$L(x') = -x(0) + sL(x)$
$x(0) = 0 : Lx' = sL(x)$
$x(0) = x'(0) = 0, L(x'') = sL(x') = s^2L(x)$
mit einfachsten Anfangswerten $x(0) = x'(0)0.. = x^{(k-1)}(0) = 0$
$L(x^{(j)}) = s^jL(x)$
$\Rightarrow L(\alpha_k x^{(k)} + .. + \alpha_0 x) = \alpha_k L(x^{(k)}) + .. + \alpha_0 L(x) = (\alpha_k s^k + \alpha_{k-1}s^{k-1} + .. + \alpha_0)L(x) = L(g)$
$L(x) = \frac{L(g)}{\alpha_k s^k + .. + \alpha_0}$
$x = L^{-1}(\frac{L^{-1}(g)}{\alpha_k s^k + .. + \alpha_0})$
$L^{-1}(y) = c\int_0^\infty e^{st}y(s)ds$
Integrieren $\rightarrow$ Partialbruchzerlegung

13.11.2009

$\rho(E)x_\Delta = \tau\sigma(E)f_\Delta \ \rho(a) = \alpha_k z^k + \alpha_{k-1}z^{k-1} + .. + \alpha_0$
Laplace-Transformation: $y(s) = \int_s^\infty e^{-st}x(t)dt$
Analog diskrete Laplace-Transformation
$y(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{-k}x_\Delta(t_k)$
$y = L(x)$
$L(x_\Delta(t_{k+1}) - x_\Delta(t_k)) = L(Ex_\Delta(t_k)) - L(x_\Delta(t_k))$
$L(Ex_\Delta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{-k}E(x_\Delta(t_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}x_\Delta(t_{k+1})$
$= \sum\limits_{l=1}^{\infty} z^{-l}x_\Delta(t_l)$
$= z * \sum\limits_{l=1}^{\infty} e^{-l}x_\Delta(t_l)$
$= z * \sum\limits_{l=0}^{\infty} z^{-l}x_\Delta(t_l) - tx_\Delta(t_0)$

$L(Ex_\Delta) = zL(X_\Delta) - zx_\Delta(t_0)$
Isbesondere für $x_\Delta(t_0) = 0$
$L(Ex_\Delta) = zL(x_\Delta)$
Alle Anfangswerte $= 0 : x_\Delta(t_0) = .. = x_\Delta(t_{k-1}) = 0$
$L(E^jx_\Delta) = z^jL(x_\Delta)$
$L(\rho(E)x_\Delta)$ - $\rho(z)L(x_\Delta)$
$L(\sigma(E)f_\Delta) = \sigma(z)L(f_\Delta)$
$\Rightarrow \rho(z)L(x_\Delta) = \sigma(z)L(f_\Delta)$
$x_\Delta = L^{-1}(\frac{\sigma(z)}{\rho(z)}L(f_\Delta))$

3.7 7.1.1 Konsistenz

Definition des Konsistenzfehlers: x Lösung von x' = f(x,t)
$r(t, x, \tau) = 1/\tau\rho(E)x_\Delta - \sigma(E)f_\Delta$

3.8 Definition 7.6:

Lineare Mehrschrittverfahren ist konsistent von der Ordnung p, wenn für alle Funktionen $f \in C^p$, $x \in C^{p+1}$, $r(x, t, \tau) = O(\tau^p)$ glm. in t

3.9 7.8 Lemma

Konsitenzordnung p, genau dann wenn ene der folgende Bedingungen erfüllt ist.

(i) $r(0, Q, \tau) = 0 \forall \tau > 0, \forall$ Polynome Q vom Grad kleiner f.

(ii) $r(0, exp, \tau) = \rho(e^\tau) - \sigma(e^\tau))O(\sigma^p)$

(iii) $\sum j = 0^k \alpha_i = 0$
$\sum_{j=0}^{\alpha_j j^l} l \sum_{j=0}^{k} \beta_j{}^{\beta_i} l = 1, .., r$

Zeigen: Konsitenzordnung $p \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow$ Konsistezordnung p
$-KOp \Rightarrow (i)$
$r = 1/\tau\rho(E)x - \sigma(E)f = 1/\tau\rho(E) - \sigma(E)x'$
$r = (0, q, \tau)$
ko: $p \to r == 1/2\rho(E)Q - \sigma(E)Q'$
$1/tau(\alpha_k Q(k\tau) + \alpha Q(k-1) + -.. + \alpha_0 Q(0) - (\beta_k Q'(k\tau) + \beta_{k-1} W(k-1)\tau + .. + \beta_0 Q(0))$
$= c/\tau +$ Polynom(τ), gradsp .- Polynom(z) $grad \leq p - 1$

$Q(z) = \sum_{i=}^{p} l_i z^i$
$Q'(z) = \sum_{i=1}^{p} p^i i z^{i-1} = p_m(i-1)z^i$

$c/\tau +$ Poolynom in τ, $grad \leq p - 1 = r = O(\tau^p)$
$\Rightarrow r = c/\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \delta\tau_i = A\tau^p \forall t > 0$
$.. \Rightarrow \tau = 0$

$r(t, x, \tau) = 1/\tau\rho(E)x - \sigma(E)f = 1/\tau\rho(E) - \sigma(E)x'$

$(i) \Rightarrow (ii) : r(0, exp, \tau) =$
$exp(\tau) = \underbrace{Q(\tau)}_{\text{Polynom von Grad p}} + R(\tau)\tau^{p+1}$
$r = r(0, Q + \tau^{p+1}R, \tau) = 1/\tau\rho(E)(Q + \tau^{p+1}R) - \sigma(E)(Q + \tau^{p+1}R + (p+1)\tau^P R)$
$= 1/\tau\rho(E)Q - \sigma(E)Q' + 1/\tau\rho(E)(\tau^{p-1}R) - \sigma(E)(\tau^p(\tau R' + (p+1)R))$
$= \tau^p(A(\tau) + B(\tau)) = O(\tau^p)$
$r = 1/\tau\rho(e^\tau) - \sigma(e^\tau)$
$E^j(exp) = e^{t+j\tau} = e^{j\tau}e^t$
$\rho(E)exp \sum a_j E^j(exp) = (\sum a_j e^{j\tau})e^t = \rho(e^\tau)e^t$
$t = 0 : r(0, exp, \tau) = 1/\tau\rho(e^\tau) - \sigma(e^\tau)$
$-(ii) \Rightarrow (iii) : r = 1/\tau\rho(e^\tau) - \sigma(e^\tau) = O(\tau^p)$
$= 1/\tau(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \underbrace{e^{\tau i}}_{=\sum_{l=0}^{p} 1/l!(\tau i)^l + O(\tau^{p+1}}) - \sum_{i=0}^{k} \beta_i \underbrace{e^{\tau i}}_{\sum_{l=0}^{p-1} 1/l!(\tau i)^l + O(\tau^p)}$
$= 1/\tau \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{p} \alpha_i 1/l!(\tau i)^l - \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{p} \beta_i 1/l!(\tau i)^l + O(\tau^P)$
$= 1/\tau \sum_{i=0}^{k} \alpha_i + \sum_{l=1}^{p}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i 1/l! i^l \tau^{l-1} - \sum_{l=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k} \beta_i 1/l!(\tau i)^l + O(\tau^P)$
$= 1/\tau \sum \alpha_i + \sum_{l=1}^{p} (\sum_{i=0}^{k} \alpha_i 1/l! i^l \tau^{l-1} - \sum_{i=0}^{k} \beta_i 1/(l-1)! \tau^{l-1} i^{l-1}) = 1/\tau \sum \alpha_i + \sum_{l=1}^{p} \frac{\tau^{l-1}}{l!}(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^l - l \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{l-1}) + O(\tau^p)$
Koeffizentenvergleich: $\sum \alpha_i = 0 \; \sum \alpha_i i^l = l \sum \beta_i e^{l-1}, l = 1, .., L$
$(iii) \Rightarrow KOp$
$r(t, x, \tau) = 1/\tau(\sum \alpha_i c(t + i\tau)) - (\sum \beta_i x'(t + i\tau))$
$x(t + i\tau) = x(t) + \sum_{l=1}^{p} 1/l! x^{(l)}(t)(i\tau)^l + O(\tau^{p+1})$
$x'(t + i\tau) = x'(t) + \sum_{l=1}^{p-1} 1/l! x^{(l+1)}(t)(i\tau)^l + O(\tau^P)$
$r = 1/\tau((\sum \alpha_i x(t))) + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \sum_{l=1}^{p} 1/l!(i\tau)^l x^{(l)}(t) - (\sum \beta_i \sum_{l=0}^{p-1} 1/l! x^{(l+1)}(i\tau)^l) + O(\tau^P)$
$= 1/\tau(\sum \alpha_i)x(t) + \sum_{l=1}^{p} \frac{\tau^{l+1}}{l!}(\sum \alpha_i i^l - l \sum \beta_i i^{l-1}) x^{(l)}(t)$
$= O(\tau^p)$

$p = 1 : \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \alpha_k = 1$
$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i$
$k = 1 : \alpha_0 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -1$
$1 = \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = 1 - \beta_0, \beta_1 = \Theta, \beta_0 = 1 - \Theta$
$X_\Delta(t + \tau) - x_\Delta(t) = \tau(\Theta f(x_\Delta), r + \tau) + (1 - \Theta) f(x_\Delta(t), t)$
$\Theta = 0$: explizites Euler
$\Theta = 1$: implizites EUler
$\Theta 1/2$: Ciante-Nicholson

17.11.2009

$\rho(E)x_\Delta = \tau\sigma(E)f_\Delta$
$\rho(1) = \sum \alpha_j = 0$
$\sum \alpha_j j^l = l \sum \beta_j j^{l-1} l = 1, .., p$
$\alpha_k = 1$
p+2 Gleichungen für 2k+2 Parameter (Unbekannte)
Maximale Konsistenzordnung: $p = 2k$
$\rightarrow$ implizite Verfahren der Ordnung 2k
Explizites Verfahren: $\beta_k = 0 \rightarrow p + 3$ Gleichungen
$\rightarrow$ explizite Verfahren der Ordnung $2k - 1$
ABER: Verfahren maximaler Konsistenzordnung für $k > 1$ sind immer instabil!

3.10 7.1.2 Stabiltät

3.10.1 Beispiel: 7.1.1:

$\rho(z) = z^2 + 4z - 5$
$\sigma(z) = 4z + 2$
$0 = \sum \alpha_k = 1 + 4 - 5 \checkmark$
$l = 1 : \sum \alpha_j * j = \sum \beta_j$
$-5 * 0 + 4 * 1 + 1 * 2 = 6 = 4 + 2$
$l = 2 : \sum \alpha_j j^2 + 2 \sum \beta_j j$
$-5 * 0 + 4 * 1 + 1 * 4 = 8 = 2(2 * 0 + 4 * 1)$
$l = 3 : \sum \alpha_j j^3 = 3 \sum \beta_j j^2$
$(-5 * 0 + 4 * 1 + 1 * 8) = 12 = 3(2 * 0 + 4 * 1) \checkmark$
Explizites 2-Schrittverfahren maximaler Konsistenzordnung $(3 = 2k - 1)$
$x' = 0, x(0) = 1 \rightarrow x(t) = 1$
$x_\Delta(0) = 1, x_\Delta(\tau) = 1 + \tau\epsilon$
$x_\Delta(t) = 1 + \tau\epsilon/6(1 - (-5)^{t/\tau}) \rightarrow \pm\infty$ (für $t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0$)
$\rho(z) = z^2 + 4z - 5 = (z - 1)(z - 5)$
ρ hat Nullstellen 1 und -5
Instabilität in der homogenen Differenzengleichung $x_{k+2} + 4x_{k+1} - 5x_k = 0$
$\rho(E)x_\Delta = 0 \rightarrow$ approximiert $x' = 0$
Forderung: x_Δ beschränkt konstante Lösung und beschränkt

3.11 7.12 Definition

Lineares Mehrschrittverfahren heisst stabil, wenn die homogene Differenzengleichung $\rho(E)x_\Delta = 0$ stabil ist.
Die homogene Differenzengleichung heißt stabil, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass $|x_\Delta(t)| \leq M \forall t = j\tau \forall j > 0$ für alle Anfangswerte $x_\Delta(0), .., x_\Delta((k-1)\tau)$
(M darf von Anfangsweten abhängen)
Lösung homogen Differenzengleichungen
$\rho(E)x_\Delta = 0$

Ansatz für spezielle Lösungen
$x_\Delta(t) = \lambda^{t/\tau}, t = j\tau \to \lambda^{t/j} \to \lambda^j$
$E^j(x_\Delta(t_k)) = E^j(\lambda^k) = \lambda^{k+j}\lambda^j x_\Delta(t_k)$
$\rho(E)x_\Delta(t_k) = \sum \alpha_j x_\Delta(t_k) = (\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j) x_\Delta(t_k) = \rho(\lambda)x_\Delta(t_k) = 0$, falls λ Nullstelle von ρ ist.
Falls ρ k-Nullstellen mit Einfachheit 1 hat $\to$ k linear unabhängige Lösungen
$x_\Delta = \lambda_i^{t/\tau}$, $i = 1, .., k$
Gleichung linear $\Rightarrow$ linear Kombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.
$x_\Delta = c_1\lambda_1^{t/\tau} + c_2\lambda_2^{t/\tau} + .. + c_k\lambda_k^{t/\tau}$
k Koeffizienten c_i aus den k Anfangswerten $x_\Delta(j\tau) j = 0, .., k-1$
lineares Gleichungssystem für (c_i) mit Vandermonde-Matrix.
Mehrfache Nullstelle: $\rho(\lambda) = 0, \rho'(\lambda) = 0$
$\rho'(\lambda) = \sum \alpha_j j\lambda^{j-1} - 1/\lambda \sum \alpha_j (j\lambda^j)$
Ansatz: $x_\Delta(t_j) = j\lambda^j$
$\rho(E)x_\Delta(t_j) = \sum \alpha_i E^i x_\Delta(t_j)$
$= \sum_{j=0}^{k} \alpha_i (j+i)\lambda^{j+i}$
$= j\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^{j+1} + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i i \lambda^{i+j}$
$= j\lambda^j \sum \alpha_i \lambda^i + \lambda^{j+1} \sum \alpha_i i \lambda^{i-1}$
$= j\lambda^j \rho(\lambda) + \lambda^{j+1}\rho'(\lambda) > 0$
λ Nullstelle Vielfachheit m:
$x_\Delta(t_j) = j^l\lambda^j$ ist Lösung für $l = 0, .., m-1$
ρ hat q verschiedene Nullstellen λ_i mit Vielfachheit v_i
$\sum_{i=1}^{a} v_i = k$
k linear unabhängige Lösungen $j^l\lambda_i^j$, $l \in 0, .., v_i - 1$
Allgemeine Lösung:
$X_j = \sum_{i=1}^{a} \sum_{l=0}^{v_i-1} \lambda_i^j j^l C_{il}$
k Koeffizienten c_{il} bestimmt durch die Anfangswerte $x_\Delta(0), .., x_\Delta((k-1)\tau)$

3.12 Satz

Eine lineare Differenzengleichung/lineares Mehrschrittverfahren ist genau dann stabil, wenn für alle Nullstellen λ des char. Polynoms ρ gilt: $|\lambda| < 1$ oder $|\lambda| = 1$ und hat algebraische Vielfachheit 1.
Beweis: $x_\Delta(t_j) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{l=0}^{v_{i-1}} c_{il} j^l \lambda_i^j$
„$\Rightarrow$“ Stabilität $\Rightarrow x_\Delta$ beschränkt für alle Anfangswerte $\Rightarrow x_\Delta$ beschränkt für alle (c_{il})
Annahme: es existiert λ_i mit $|\lambda_i| > 1$ oder $|\lambda_i| = 1$ und $v_i \geq 2$
(i)$|\lambda_i| > 1$, $c_{i0} = 1$, alle anderen Koeffizienten $= 0$.
$X_\Delta(t_j) = \lambda_i^j \Rightarrow ||x_\Delta(t_j)|| \to \infty$ für $j \to \infty$
↯ Widerspruch zur Stabilität
(ii) $|\lambda_i| = 1$ und $v_i \geq 2$
$c_{i0} = 0$, $c_{i1} = 1$, alle anderen Koeffizienten $= 0$
$x_\Delta(t_j) = j\lambda_i^j \to |x_\Delta(t_j)| = j|\lambda_i|^j = j \Rightarrow |x_\Delta(t_j)| \to \infty$↯ Widerspruch zur Stabiltät
„$\Leftarrow$“ $|\lambda_i| < 1$, $g : s \to s^l\lambda_i^s, s \in R^+, l \geq 0$
g ist stetige Funktion und $g(s) \to 0$ für $s \to \infty$
$\log(g(s)) = l * log(s) + \underbrace{s \underbrace{\log(\lambda_i)}_{<0}}_{\to -\infty}$
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{-\infty}$
$s \to |g(s)|$ stetig
$(|\lambda_i| = 1, v_i = 1, |\lambda_i^j| = 1 \leq C)$
$g(0) < \infty, g(\infty) < \infty \Rightarrow g$ beschränkt
$\Rightarrow EC > 0 : |j^l\lambda_i^j| \leq C$

$|x_\Delta(t_j)| > |\sum_{i=1}^{a}\sum_{l=0}^{v_i-1} c_{il} j^l \lambda_i^j$
$\leq \sum_i \sum j|c_{il}|j^2\lambda_i^j|$
$\leq C\sum_i \sum j|c_{il}| =: M\square$
Euler: $\rho(z) = t - 1\lambda_1 = 1$, $v_1 = 1 \to$ stabil
Mittelpunktsregel: $\rho(z) = z^2 + 1\lambda_1 = 1$, $v_1 = 1$, oder $\lambda_2 = -1, v_1 = 1 \to$ stabil

20.11.2009

$\rho(E)x_\Delta = \sigma(E)f_\Delta$
Stabilität $\Leftrightarrow$ λ Nullstelle von $\rho : |\lambda| < 1$
$|\lambda| = 1$ und einfach
HS der Numerik
Konsistenz + Stabilität $\Leftrightarrow$ Konvergenz

3.13 Definition: 7.14

Lineares MS-Verfahren ist konvergent, falls $\lim_{\tau\to 0} x_\Delta(t) := x(t)$ für $t \in \Delta$
Konvergenz von der Ordnung P, wenn $|x_\Delta(t) - x(t)| = O(\tau p)$
sobald $x_\Delta(t_0 + j\tau) \to x_\Delta(t_0) = x_0$, $j = 0, .., k-1$
für $\tau \to 0$

3.14 Satz 7.15

Ein konvergentes, lineares Mehrschrittverfahren ist stabil und konsistent. Speziell gilt: $\rho * (1) = \sigma(1) \neq 0$
$\rho(1) = 0$
Beweis:

(i) Stabilität: $\rho(E)x_\Delta = 0$ hat beschränkte Lösungen, $x' = 0, x(0) = x_0$
Konvergenz $\Rightarrow x_\Delta(t) \to x(t) := x_0$
Für τ hinreichend klein gilt:
$|x_\delta(t)| \leq |x_0| + 1$
$\forall \tau = t_0 : |x_\Delta|$ ist beschränkt durch $|x_0| + 1$

(ii) Konsistenz $\rho(1) = \sum \alpha_j = 0$
$x' = 0, x(t_0) = 1$
$x_\Delta(t_0 + j\tau) = 1, j = 0, .., k-1$
$\rho(E)x_\Delta = \tau\sigma(E)f_\Delta = 0$
$\rho(E)x_\Delta = 0$
$t = t_0 : \rho(E)x_\Delta(t_0) = \alpha_k x_\Delta(t_l) + \alpha_{k-1}\underbrace{x_\Delta(t_{k-1})}_{=0} + .. + \alpha_0 x_\Delta(t_0)$
$\sum_{\alpha_j} = \alpha_k(1 - x_\Delta(t_k)) \to \alpha_k(1-1) = 0$
$\rho(1) = \sum \alpha_j \to 0$ für $\tau \to 0$
$\Rightarrow \rho(1) = \sum \alpha_j = 0$

(iii) 1 Nullstelle von $\rho \Rightarrow 1$ ist einfache Nullstelle $\Rightarrow \rho'(1) \neq 0$
$\Theta = \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}$
$x_\Delta(t) = \Theta t$
$t = 0 : \alpha_k(\Theta k\tau) + \alpha_{k-1}(\Theta(k-1)\tau) + .. + \alpha_1\Theta\tau = \theta\tau\rho'(1)$
$\rho'(1) = \sum j\alpha_j$

$\rho(1) = 0 : \alpha_k(\Theta j\tau) + \alpha_{k-1}(\Theta j\tau) + .. + \alpha_0(\Theta j\tau) = 0$
$\alpha_k(\underbrace{\Theta(j+1)\tau}_{x_\Delta t_{j+k}}) + \alpha_{k-1}(\underbrace{\Theta(j+k-1)\tau}_{x_\Delta t_{j+k-1}}) + .. + \alpha_0(\underbrace{\Theta j\tau}_{x_\Delta t_j}) = \Theta\tau\rho'(1) = \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}\tau\rho'(1) = \tau\sigma(1)$
$= \rho(E)x_\Delta(t_j) = \tau\sigma(1)$

$= \tau \sum_i \beta_i f_\Delta(r_{j+i})$, wenn $f_\Delta = 1$
$= \tau\sigma(E) f_\Delta$
$x_\Delta(t) = \sigma(t)$ ist Lösung des linearen Mehrschrittverfahrens für $x' = 1$
$x_\Delta(j\tau) = \Theta j\tau, j = 0, .., k-1$
x_Δ ist die Lösung des Mehrschrittverfahrens für $x' = 1, x(0) = 0$
Lösung: $x(t) = t$
Konvergenz: $x_\Delta(\underbrace{t}_{=\Theta t \to t \Rightarrow \Theta = 1}) \to x(t)$ für $\tau \to 0$

3.15 Satz 7.23

Ein stabiles und konsistentes, lineares Mehrschrittverfahren ist immer konvergent
Bei Konsistenzordnung p ist der Diskretisierungsfehler beschränkt durch $|\epsilon_\Delta(t)| = \Theta(\tau^p + \epsilon_0)$
$\epsilon_0 = \max_{l=0,..,k-1} |x_\Delta(t_l) - x(t_l)|$

3.16 Satz 7.16:

Es existieren stabile Verfahren der Ordnung p, falls $p \leq k+2$, k gerade, und $p \leq k+1$, k ungerade
$p \leq k$ für $\beta_k = 0$

3.17 Konstruktion stabiler Mehrschrittverfahren

Standard: Adams-Verfahren
BDF-Verfahren(für steife Probleme)

3.17.1 Adams-Verfahren

Motivation: wollen stabiles Verfahren
wollen maximale Konsistenzordnung (fast) $\to p = k+1$(implizit), $p = k$(explizit)
implizit: $\alpha k - 1, .., \alpha_0, \beta_k, .., \beta_0 : 2k+1$
$p = k+1$ Gleichungen
K: koeffizienten
$k+1$ aus Gleichungen, $\sum \alpha_j j^l = l \sum \beta_j j^{l-1}$
Idee: Wähle zuerst $\alpha_{k-1}, .., \alpha_0$ so dass das Polynom ρ einfache Nullstelle 1 hat ($\sum \alpha_j = 0$), k-1 fache Nullstelle 0
$\rho(z) = z - 1z^{k-1} = z^k - z^{k-1}$
Bestimme β_j aus $\sum \beta_j j^{l-1} = 1/l \sum \alpha_j j^l$
$\to$ Gleichungssystem mit Vandermonde-Matrix
$\to$ ex existiert eindeutige Lösung
$\to$ Lösung darstellbar über dividierte Differenzen wie bei der Interpolation
$k = 0 : \sigma(z) = z \to$ implizite Eulerverfahren
$k = 1 : \sigma(z) = \frac{z+1}{2}$ Crichton-Nichelson
$x_\Delta(t_{j+1}) - x_\Delta(t_j) = \tau/2(f_\Delta(t_{j+1}) + f_\Delta(t_j))$
$k = 2 : \sigma(z) = \frac{5z^2+8z-1}{12}, \rho(z) = z^2 - z$
$k = 3 : \sigma(z) = \frac{7z^3+19z^2-5+1}{24}, \sigma(z) = z^3 - z^2$

3.17.2 Adams-Moulton-Verfahren der Ordnung K

explizite Verfahren: $\beta_k = 0$
$\rho(z) = z^k - z^{k-1}$ $\beta_{k-1}, .., \beta_0$ bestimmt aus $\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j j^{l-1} = 1/l \sum \alpha_j j^l, l \leq k-1$

3.17.3 Adams-Bashfort Verfahren

$k=1:\sigma(z)=1$: explizites Eulerverfahren $k=2:\sigma(z)=\frac{3z-1}{2}\rho(z)=z^2-z$
$k=3:\sigma(z)=\frac{23z^2-16z+5}{12}\rho(z)=z^3-z^2$
$k=4:\sigma(z)=\frac{55z^3-59z^2+37z-9}{24}$

4 §8 Numerische Lösung von Randwertproblemen

Finite-Differenzen-Verfahren

4.1 (8.1) Randwertprobleme für lineare gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung

$\overline{p}(s)x''(s)+\overline{r}(s)x'(s)+\overline{q}(s)x(s)=f(s), s\in(a,b)$
$\beta_1 x=\alpha_1, \beta_2 x=\alpha_2, x(a)+\beta_1 x'(a)=\gamma, x(b)+\beta_2 x'(b)=\delta$

$\beta_1=\beta_2=0 (\alpha_1,\alpha_2=1)$: Dirichlet-Problem
$\alpha_1=\alpha_2=0 (\beta_1=\beta_2=1)$: Neumann-Problem
Annahme: $\overline{p}(s)\neq 0, \forall s\in[a,b]$

$x''+\frac{\overline{r}}{\overline{p}}x'+\frac{\overline{p}}{\overline{q}}x=\frac{\overline{f}}{\overline{p}}$
$\underbrace{px''+\frac{\overline{r}}{\overline{p}}px'}_{(px')'}+\underbrace{\frac{\overline{p}}{\overline{q}}p}_{=:q}\ x=\underbrace{\frac{\overline{f}}{\overline{p}}p}_{=:f}$
$p'=\frac{\overline{r}}{\overline{p}}p\Rightarrow p(s)=\int_a^s \frac{S(\sigma)}{\overline{p}(\sigma)}d\sigma$
$Lx=(px')'+qx=f$
L ist formal selbstadjungiert in L^2-Skalarprodukt
x,y mit $x(a)=x(b)=y(a)=y(b)=0$
$\langle Lx,y\rangle=\int_a^b (Lx)(s)y(s)ds=\int_a^b [(px')'+qx]yds$
$=\underbrace{px'y|_a^b}_{=0}-\int_a^b px'y'ds+\int_a^b [0,y]xds$
$=\underbrace{-pxy'|_a^b}_{=0}+\int_a^b x\underbrace{[(py')'+qy]}_{Ly}=\langle x,Ly\rangle$

24.11.2009

4.1.1 Randwertprobleme

$(px')'+\rho x=f$, „Divergenzform“
$\nabla(-p\nabla x)+\rho x=f$
$\nabla(\vec{j})$..
$\sum_i \frac{\partial}{\partial s_i}(p\frac{\partial x}{\partial s_i})+\rho x=f$
$(px')'+\rho x=f$
$B_1x=\gamma, B_1x=\delta$
$\alpha_1x(a)+\beta_1x'(a), \alpha_2x(a)+\beta_2x'(a)$

4.2 8.1: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

$px'=\int_a^s (f(sigma)-\rho(\sigma)x(\sigma))d\sigma+c_1$
Beispiel: $\alpha_1=0, s=a$
$x'(a)=\frac{\gamma}{\beta_a}, p(a)x'(a)=c_1\Rightarrow c_1=\frac{\gamma}{\beta_1}p(a)$

Eventuell c_1 zunächst unbestimmt $(a_1 \neq 0, a_2 \neq 0)$
Nochmal integrieren:
$x'(s) = \frac{}{p(s)}(c_1 + \int_a^s (f - \rho x)d\sigma)$
$\Rightarrow x(s) = \int_a^s 1/(p(\sigma))(c_1 + \int_a^\sigma (f - \rho x)d\xi)d\sigma + c_3$
Bestimme c_1, c_2 aus Nebenbedingungen
Bsp: $x(a) = \gamma, x(b) = \delta$
s = a: $\gamma = x(a) = c_2$
s= b: $\delta = x(b) = \int_a^b 1/p(\sigma)(c_1 + \int_a^\sigma (f - qx)d\xi)d\sigma + \gamma$
$x_1 \int_a^b 1/p(\sigma)d\sigma = \gamma - \delta + \int_a^b 1/p(\sigma) \int_a^\sigma (f - qx)d\xi d\sigma$
$x_1 = (\gamma - \delta)\overline{p} + \int_a^b \overline{p}/p(\sigma) \int_a^\sigma (f(\xi) - qx(\xi))d\xi d\sigma$
$\overline{p} = 1/(\int_a^b 1/p(\sigma)d\sigma)$
$x(s) = (\gamma - \delta) \int_a^s \overline{p}/p(\sigma)d\sigma + \int_a^s 1/p(\sigma)d\sigma \int_a^b \overline{p}/p(\sigma) \int_a^\sigma (f - qx)d\xi d\sigma + \int_a^s 1/p(\sigma) \int_a^\sigma (f - qx)d\xi d\sigma + \gamma$
$\int_a^b 1/p(\sigma) \int_a^\sigma (f - qx)d\xi d\sigma = \int_a^b (f(\xi) - q(\xi)x(\xi)) \int_\xi^b 1/p(\sigma)d\sigma d\xi$
$= \int_a^b f(\xi) \int_\xi^b 1/p(\sigma)d\sigma + \int_a^b (-q(\xi) \int_x^{} i^b 1/p(\sigma)d\sigma)x(\xi)d\xi$
$\int_a^s 1/p(\sigma) \int_a^\sigma (f - qx)d\xi d\sigma = \int_a^s f(\xi) \int_\xi^s 1/p(\sigma)d\sigma + \int_a^s (-q(\xi) \int_x^{} i^s 1/P(\sigma)d\sigma)x(\xi)d\xi$
$\int_a^s Funktion(\xi, s)x(\xi)d\xi = \int_a^b Schlangefunktion(\xi, S)x(\xi)d\xi$
Schlangefunktion $= \begin{cases} Funktion(\xi, S)/\zeta \leq s \\ 0 \qquad\qquad\qquad \zeta > s \end{cases}$
Allgemeine Form:
$x(s) = g(s) + \int_a^b k(\zeta, s)x(\zeta)d\zeta$ mit k stetig
Integralgleichung 2.Art (x im Integral und ausserhalb)
(integralgleichung 1.Art: x nie im Integral, $\int_a^b k(\zeta, s)x(\zeta)d\zeta = g(s)$)
Achtung: i.A. ist $k(\zeta, s) \neq 0$ für $\zeta > s$
Vergleichung: AWP: $x(s) = g(s) + \int_a^s k(\zeta, s)x(\zeta)d\zeta$
mit $\overline{R}(\zeta, S) = 0$ für $\zeta > s$: Volterra-Intergralgleichung
RWP: $k(\zeta, s) \neq 0$ für $\zeta > s \rightarrow$ Integralgleichung koppelt alle Werte von x im Intervall (a,b), (Fredholm-Integralgleichungen)
$x(s) = \rho(s) + \underbrace{\int_a^b k(\sigma, s)x(\sigma)d(\sigma)}_{(Kx)(s)}$
$K.L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$
$x \rightarrow \int_a^b k(., \sigma)x(\sigma)d\sigma$
$x = g + Kx$
Fixpunktgleichung in Banachraum
Versuch 1: Banach'scher Fixpunktsatz: $F(x) = g + Kx$
Kontraktivität: $||F(x_1) - F(x_2)|| \leq x||x_1 - x_2||, c < 1$

$||F(x_1) - F(x_2)||_{L^2} = ||K(x_1 - x_2)||_{L^2}$
$= \sqrt{\int_a^b (\underbrace{\int_a^b k(\sigma, s)x(\sigma)d\sigma(1)}_{\text{Cauchy-Schwarz}})^2 ds}$
aus (1) folgt: $\leq \sqrt{\int_a^b k(\sigma, s)^2 d\sigma} * \sqrt{\int_a^b x(S)^2 d\sigma}$

$$||F(x_1)-F(x_2)||_{L^2} \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b d(\sigma,s)^2 d\sigma \int_a^b x(\sigma)^2 d\sigma ds} \leq \underbrace{\sqrt{\int_a^b \int_a^b k(\sigma,s)^2 d\sigma ds}}_{=c} ||x||_{:2}$$

F kontraktiv ($c<1$), wenn k klein genug ist
I.A. nicht gegeben, auch für RWP
Versuch 2: Schauderschen Fixpunktsatz (nur Existenz)
VS:
(i) K kompakt ✓
(ii) K bildet $B_R(x_0)$ in sich selbst ab?? → nur für k klein
Versuch 3: K kompakt + linear → lineare Operatoren über Eigenwerte charakterisieren
Eigenwertproblem für K
$Kx = \lambda x, (\lambda \in C)$
$\lambda = 1$ Eigenwert von K, x_1 Eigenvektor
$Kx_1 = x_1$
$x = Kx + g$
$(x + \alpha x_1) = K(x + \alpha x_1) + g$
x Lösung $\Rightarrow x + \alpha x_1$ Lösung für alle $\alpha \in R$
Idee: 1 Eigenwert von K + eventuell keine Existenz und Eindeutigkeit
1 kein Eigenwert von $K \Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit??
(1 kein Eigenwert $\Leftrightarrow x = Kx$ hat nur Lösung $x = 0$)
Spektrum eines linearen Operators:
$\sigma(K) := \{\lambda \in C | \lambda I - K$ stetig invertierbar
für uns interessant: $1 \in \sigma(K)$?
$1 \notin \sigma(K)(I-K)x = f \Rightarrow x = (I-K)^{-1}g$

Kiesz'sche Sätze für $\lambda I - K$
1.RS: $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda I - K$ surjektiv
2.RS: Es gibt nur abzählbar viele $\lambda_k \neq 0$ mit $\lambda_k I - K$, nicht injektiv ($\Leftrightarrow N(\lambda_k I - K) \neq 0$)
$N(\lambda_k I - K)$ ist endlich dimensional
$\Rightarrow$ Spektrum eines kompakten Operators
$\sigma(K) \subseteq \{0\} \cup \lambda_k{}_{k=0}^{\infty}, \lambda_k$ ist Eigenwert mit endlicher Vielfachheit
Also $1 \in \sigma(K) \Leftrightarrow 1$ ist Eigenwert von $K \Leftrightarrow \exists x \neq 0 : x = Kx$
Integralgleichung 2.Art ist eindeutig lösbar, wenn es kein $x \neq 0$ mit $x = Kx$ gibt.
RWP: Analog wie vorher führt $(px')' + qx = 0$
$Bx_1 = 0, B_2 x = 0$
auf $x = Kx$.
Satz: Das RWP $(px')' + qx = f, B_1 x = \gamma, B_2 x = \delta$
hat genau dann eine (eindeutige) Lösung, wenn das homogene AWP $(px') + qx = 0, B_1 x = 0, B_2 x = 0$
nur die Lösung $x = 0$ hat.
Überprüfung des homogenen Problems
Beispiel: $x(a) = 0, x(b) = 0$
$(px')' + qx = 0$
$\Rightarrow (px')'x + qx^2 = 0$
$\Rightarrow \int_a^b (px')'x + qx^2 ds = 0$
$\Rightarrow \underbrace{px'x|_a^b}_{=0} - \int_a^b px'x' + \int_a^b qx^2 = 0$
$\Rightarrow \int_a^b px'^2 - qx^2$
$p = \exp(..) > 0, \int x'^2 \geq 0$
Mögliche Bedingung an q:
$q(x) < 0 \forall s \in [a,b]$

$0 = \underbrace{\int_a^b (px')^2 >0 \underbrace{-qx^2}_{>0} dx}_{} < 0$ für $x \neq 0$
Widerspruch zur Lösung $x = 0$

27.11.2009

$(px')' + qx = f, s \in [a, b]$
$B_1x = \gamma, B_2x = \delta$
$x = Kx + q$
$(Kx)(s) = \int_a^b k(\sigma, s)x(\sigma)d\sigma$
1 kein Eigenwert von K
$\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit
1 kein Eigenwert von $K \Leftrightarrow (px')' + qx = 0, B_1x + B_2x = 0$
1 Eigenwert von K
2. Riesz'schen Satz $\Rightarrow$ EW 1 hat endliche Vielfachheit m.
Es gibt m linear unabhängige Lösungen von $x = Kx$ Eigenvektoren (Eigenfunktionen) $x_1, .., x_m$
Falls x Lösung von $x = Kx + g \Rightarrow \tilde{x} = x + \alpha_1x_1 + .. + \alpha_mx_m$, löse ebenfalls $\tilde{x} = K\tilde{x} + \rho$
Fragen: Schranke für m?
Überprüfung der Existenz.
Vielfachheit m: Bsp: $p = 1, q = const.$
$x'' = qx = 0$

4.2.1 lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$\rightarrow$ Lösungen nur von der Form $\sum \alpha_i e^{\lambda_i S}$
Was sind mögliche Werte $\lambda_i \in C$
$x = e^{\lambda S}$
$\Rightarrow x'' + qx = \lambda^2 e^{\lambda S} + qe^{\lambda S} = 0, \forall s \in [a, b]$
$\Rightarrow \lambda^2 + q = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-q}$
$\Rightarrow$ maximal zwei linear unabhängige Lösungen
$x = e^{\sqrt{-q}S}, x = e^{-\sqrt{-q}S}$ von $(px') + qx = 0$
$\Rightarrow$ Vielfachheit $m \leq 2$
$\rightarrow$ Diese Aussage $m \leq 2$ gilt für allgemeine p,q
Wie überprüfen wir die Existenz?
$x = Kx + g$
Einfach: $< x, x >=< Kx, x > + < q, x >$
(wie letztes Mal multiplizieren der Dgl. und integrieren)
Statt mit x nehmen wir Skalarprodukt mit y.
$< x, y >=< Kx, y > + < g, y >$
$< g, y >=< x, y > - < Kx, y >=< x, y > - < x, K^*y >=< x, y - K^*y >$
$\Rightarrow < g, y >= 0$, falls $y = K^*y$!
Existenz von $x = Kx + g \Leftrightarrow < g, y >= 0 \forall y, y = K^*y$

4.3 FREDHOLM-ALTERNATIVE

1 EW von K mit Vielfachheit m $\Leftrightarrow$ 1 EW von K^* mit der selben Vielfachheit m

4.3.1 Adjungierten Integraloperator

$< Ku, v >=< u, K^*v > \forall u, v$
$< Ku, v >= \int_a^b (Ku)(s)v(s)ds = \int_a^b \int_a^b k(\sigma, s)u(\sigma)v(s)d\sigma ds$

$= \int_a^b u(\sigma) \int_a^b k(\sigma,s)v(s)dsd\sigma$
$= \int_a^b u(\sigma)(K^*v)(\sigma)d\sigma$
$(Ku)(s) = \int\limits_a^b K(\sigma,s)u(\sigma)d\sigma$
$(K^*v)(s) = \int\limits_a^b K(s,\sigma)v(\sigma)d\sigma$
k symmetrisch $\Leftrightarrow k(s,\sigma) = k(\sigma,s) \Rightarrow K = K^*$
Differentialopereator $L = (px')' + qx$ erfüllt $L = L^*! \Rightarrow K = K^*$
Also $y = K^*y \Rightarrow y = Ky \Leftrightarrow (py')' + qy = 0, B_1y = 0, B_2y = 0$
Fredholm - Alternative für RWP
y homogene Lösung $(py')' + qy = 0$
$(px')' + qx = f <-$ Skalarprodukt
$\int\limits_a^b (px')'y + qyds = \int\limits_a^b fyds$
$px'y|_a^b - pxy'|_a^b + \int\limits_a^b x((px')' + qy)ds = \int\limits_A^b fyds$
Bsp. $x(a) = \gamma, x(b) = \delta, y(a) = y(b) = 0$
$0 = \int_a^b fyds + p(b)\delta y'(t) - p(a)\gamma y'(a)$

4.4 8.2 Numerische Lösung von AWP mit finiten Differenzen

Unterteilung (a,b) in Gitter $\Delta = \{S_j\}$
$a = S_0 < S_1 < ...S_N = b$
(am einfachsten: äquidistante Gitter $S_j = ajh, h = 1/N$)
Diskretisiere $(px')'(s_j) + qx(s_j) = f(s_j), j = 1,..,N-1$
$B_1x(S_0) = \gamma, B_2x(S_N) = \delta$
Approximation erster Ableitungen:
z.B: analog Euler, $x'(S_j) \approx \frac{x(S_j)-x(S_{j-1})}{S_j-S_{j-1}} =: D_-x$
$x'(S_j) \approx \frac{x(S_{j+1})-x(S_j)}{S_{j+1}-S_j} =: D_+x$
analog Mittelpunktsregel
$x'(S_j) \approx 1/2D_-x + 1/2D_+x = \frac{x(S_{j+1})-x(S_{j-1})}{2h}$
Konsistenz: $x'(S_j) - D_-x(s_j) = x'(S_j) - \frac{x(s_j)-x(s_{j-1})}{h}$
$= x'(S_j) - \frac{x(s_j)-(x(s_j)-x'(s_j)h+O(h^2))}{h}$
D_- und D_+ konsistent von Ordnung 1
$D_cx := 1/2(D_+x + D_-(x)) = x'(s_j) - D_cx(s_j) = x'(s_j) - \frac{1}{2h}(x(S_{j+1}) - x(s_{j-1}))$
$= x'(s_j) - \frac{1}{2h}(x(s_j) + x'(s_j)h_1 + 1/2x'(s_j)h^2 + O(h^3) - (x(s_j) - x'(s_j) + 1/2x''(s_j)h^2 + O(h^3)) = x'(s_j) - \frac{1}{2h}(2x'(s_j)h + O(h^3)) = O(h^2)$
$(px')' = p'x' + px''$
$x'' \approx D_cDcx \approx D_-D_-x \approx D_+D_+x \approx D_+D_-x \approx D_-D_+x \approx D_-D_cx \approx D_+D_cx$
Beispiel: $D_+D_+ = D_+(\frac{x(s_{j+1})-x(s_j)}{h}) = \frac{x(s_{j+2})-2x(s_{j+1})+x(s_j)}{h^2}$
$D_+D_-x \approx D_+(\frac{x(s_j)-x(s_{j-1})}{h}) = \frac{x(s_{j+1})-2x(s_j)+x(s_{j-1})}{h^2}$
$S_{n-1} = b - h : D_+D_-x = \frac{x(s_N)-2x(s_{N-1})+x(s_{N-2})}{h^2}$
$D_+D_+x = \frac{x(s_{N+1})-2x(s_N)+x(s_{N-1})}{h^2}$

$x''(s_j) - D_+D_-(s_j) = x''(s_j) - 1/h^2(s_{j+1} - 2x(s_j) + x(s_{j-1}))$
$= x''(s_j) - 1/h^2(x(s_j) + x'(s_j)h1/2s''(s_j)h^2 - 2x(s_j) + x(s_j) - x'(s_j) + 1/2x''(s_j)h^2 + O(h^3) = O(h^2)1/h^2$
Genauer $(1/6x'''(s_j)h^3 - 1/6x'''(s_j)h^3 + O(h^4)) = O(h^2)$
$x''(s_j) - D_+D_+x(s_j) = x''(s_j) - 1/h^2(x''(s_{j+1})h^2 + O(h^4)) = x''(s_j) - x''(s_{j+1}) + O(h^2)$
$= x''(s_j) - (x''(s_j) + x'''(s_j)h + O(h^2) + O(h^2)) = -x'''(s_j)h + O(h) = O(h)$

$\partial_x^t = -\partial_s : D_+^t = -D_-$
$\int x'(s)y(s) = \int x(s)y'(s)ds$
$< \partial_s x, y > = < x - \partial y >$

$D_2x = D_+D_-x = D_-D_+$

04.12.2009

$(px')' + qx = f, s \in (a,b)$
Diskretisierung auf äquidistantem Gitter
$\Delta = a, jh$
$x'' \approx D_2 x = D_+ D_- x = D_- D_+ x = \frac{x(s_{j+1} - 2x(s_j) + x(s_j - 1)}{h^2}$
=> Konsitenzordnung 2
$px'' + p'x' + qx = f$
Diskretisierung mit Konsistenzordnung 2
$x_\Delta : \Delta -> R^d$
$p(s_j)(D_2 x_\Delta(s_j)) + p'(S_j) D_c x_\Delta(s_j) + q(s_j) x_\Delta(s_j) = f(s_j), j = 1, ..., N-1$
$j = 0$: Randbedingung $B_1 x = \gamma$
$j = N$: Randbedingung $B_2 x = \delta$

4.5 Diskretisierung der Randbedingung

$x = a : B_1 x = \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = \gamma$
diskretisiert: $\alpha_1 x_\Delta(S_0) + \beta_1 D_+ x(s_0) = \gamma$
$s = b : B_2 x = \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = \delta$
$j = N : \alpha_1 x_\Delta(S_N) + \beta_1 D_- x_\Delta(S_N) = \delta$
$N+1$ lineare Gleichungen für $(n+1)$ Unbekannte: $x_\delta(s_j) =: u_j$
$j = 0 : \alpha_1 u_0 + \beta_1 \frac{u_1 - u_0}{h} = \gamma$
$p_j = p(s_j), p'_j = p'(s_j), f_j = f(s_j), q_j = q(s_j)$
$1 \le j \le N-1 : P_j \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + p'_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + q_j u_j$
$j = N : \alpha_2 u_N + \beta_2 \frac{u_N - u_{N-1}}{k} = \delta$
=> LGS $Ax = y$

$$y = \begin{pmatrix} \gamma' \\ f_1 \\ f_2 \\ .. \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1/h & \beta_1/h & 0 & & \\ p_1/h^2 - (p'_1)/(2h) & -\frac{2p}{h^2} + q_1 & \frac{p_1}{h^2} + \frac{p'_1}{2h} & \ddots & 0 \\ .. & \ddots & & & \\ 0 & .. & .. & 0 & -\frac{\beta_2}{h} \quad \alpha_2 + \frac{\beta_2}{h} \end{pmatrix}$$

Das ergibt eine tridiagonal Matrix
Max $\le 3N - 1$ Nichtnullelemente:
$(N+1)^2 - (3_N + 1) = N^2 - N$ Nulleinträge
Für große N sind die meisten Einträge von A Null.
$- >$Dünnbesetzte Matrix (sparse)
$- >$ Speicheraufwand Sparse
$- > (i, j, a_{ij})$ für $a_{ij} \neq 0$
werden $(3N-1)^2$ Maschinenzahlen und $2(3N+1)$ Integer
Löse $Au = f$ mit speziellen Methoden, die Dünnbesetztheit von A ausnutzen $- >$ mehr im Januar

Beispiel:
$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$
$x(a) = \gamma, x(b) = \delta$
$p = 1, x'' + qx = f$
elimiere: $u_0 = x_\Delta(a) = \gamma$
$u_N = x_\Delta(b) = \delta$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2/h^2 + q_1 & 1/h^2 & .. \\ 1/h^2 & -2/h^2 + q_2 & 1/h^2 \quad .. \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} f_1 - \gamma/h^2 \\ f_2 \\ .. \\ f_{n-2} \\ f_{N-1} - 2/h^2 \end{pmatrix}$$
$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{y}$
$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ .. \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$
$\tilde{A}$ symmetrisch
$B = -\tilde{A}$ hat nur nicht positive Einträge ausserhalb der Diagonalen
B hat für h klein genug nur positive Einträge auf der Diagonalen
(insbesondere ist $b_{ii} > 2/h^2 fallsq \leq 0$
$b_{ii} \geq 2/h^2 - 1/h^2 + 1/h^2 + 0$
$= |a_{i,i-1}| + |a_{i,i-1}| + \sum_{|j-i|>1} |a_{ij}|$
$= \sum_{i \neq j} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$
Definition Eine Matrix $B \in R^{n \times n}$ heißt diagonaldominant, falls $b_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |bij|$
(Zeilendiagonaldominant)
Wir wollen garantieren, dass A invertierbar ist, dann gilt $\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f} => \tilde{u} = \tilde{A}^{-1}\tilde{f}$ eindeutig + Stabilität
$||u|| \leq C||f||$ mit C unabhängig von h.
Wir wissen für $Au = f$ mit A regulär gilt: $||u|| \leq \underbrace{||A^{-1}||}_{\text{zugeordnete Matrixnorm zu } ||f||} ||f||$
„Einfachste“ Wahl: euklidische Norm in R^n
zugeordnete Matrixnorm ist Spektralnorm
Alternative: Supremumsnorm : $||u||_\infty = \max_i ||u_i|$
zugehörige Matrixnorm ist die Zeilensummennorm
passt zu strukturellen Eigenschaften von A bzw. B

08.12.2009

$(px')x' + qx = f, \in (a, b)$
$B_1 x = \gamma, B_2 x = \delta$
→ Diskretisierung mit Differenzenquotienten auf einem äquisdistanten Gleichungssystem für die Werte aus den Gitterpunkten $\{u_j\}$.

Stabilität und Konvergenz
Für Konvergenz:
$Au = y$
$(px')' + qx = f$
$v = (x(s_j))_{j=0,..,N}$
$r = Av - y = O(h)$
$A(u - v) = y - (r + y) = -r = O(h^p)$
$e = u - v = -A^{-1}r$
$||e||_\infty = ||u - v||_\infty \leq ||A^{-1}||_{ZS} \underbrace{||r||_\infty}_{O(h^p)} \leq Ch^p$
$A^{-1} \in R^{N \times N}$ → $||A^{-1}||_{ZS}$ abhängig von N → abhängig von h.
Deshalb benötigen wir Stabilität in folgenden Sinn.
$||A^{-1}||_{ZS} \leq C, \forall N \geq N_0$
mit C unabhängig von N (bzw. $h - 1/N$)
Wenn Stabilität erfüllt ist, folgt sofort dass Konvergenzordnung= Konsistenzordnung
Stabilität für das RWP in Supremumsnorm
Vereinfacht: $(px')' = f \in (a, b)$
$x(a) = \gamma, x(b) = \delta$

4.5.1 Maximumsprinzip

Bsp: $x'' = f$
$f > 0 \in (a,b) \to x'' > 0$, x ist konvex
konvexe Funktion nimmt im Maximum, Rand an!
Also: $x(s) \leq \max \gamma, \delta$
$f < 0 \in (a,b) \to x'' < 0 \to x$ konkav
$\to$ x nimmt Minimum am Rand an.
$x(s) \geq \min \gamma, \delta$
Stabilität aus Maximumsprinzip:
$x'' = f$, vgl. mit $y'' = 1$
$x(a) = \gamma, x(b) = \delta$
$(x - cy)'' = f - c, y(a) = \gamma/c; y(b) = \delta/c$
$c \geq ||f||_\infty, f - c \leq f - \max_\sigma |f(\sigma)| \leq 0$
Mit Randbedingungen $(x - cy)(a) = 0, (x - cy)(b) = 0$
$(x - cy)'' \leq 0, \to x - cy$ nimmt Minimum am Rand an
$\Rightarrow (x - cy)(s) \geq 0, \forall s \in (a,b)$
$x \geq cy \geq ||f||_\infty \min_\sigma y(\sigma)$
$y'' = 1 \Rightarrow y' = s + a + c_1 \Rightarrow y = \frac{(s-a)^2}{2} + c_1(s-a) + c_2$
$\gamma/c = y(a) = c_2$
$\delta/c = y(b) = \frac{(b-a)^2}{2} + c_1(b-a) + \gamma/c$
$c_1 = \frac{1}{b-a}\frac{\delta-\gamma}{c} - 1/2(b-a)$
$y(s) = \frac{(b-a)^2}{2} + \frac{s-a}{b-a}\frac{\delta-\gamma}{c} - 1/2(s-a)(b-a) + \gamma/c$
$x(s) \geq c \min_c y(s) = 1/2 \underbrace{(s-a)(s-b)}_{\geq 1/4(g-a)^2} c + \underbrace{\frac{s-a}{b-a}}_{|.|\leq 1}(\delta - \gamma) + \gamma$
$\geq 1/8(b-a)^2 c - |\delta| + \gamma$
$\geq -\max 1, 1/8(b-a)^2 \max ||f||_\infty, |\gamma|, |\delta|$
$x(s) \geq -\eta \max ||f||_\infty, \gamma, \delta$

jetzt: $c \leq -||f||_\infty$
$(x - cy)'' = f - c \geq -||f||_\infty + ||f||_\infty \geq 0$
$(x - cy)(a) = 0, (x - cy)(b) = 0$
$\Rightarrow x - cy \leq 0 \in (a,b)$
$x \leq |c|||y||_\infty \leq \eta \max ||f||_\infty, |\gamma|, |\delta|$
$\Rightarrow ||x||_\infty = \max_{s\in[a,b]} |x(s)| \leq \eta \max ||f||_\infty, |\gamma|, |\delta|$

4.6 Stabilitätsabschätzung für RWP

Supremumsnorm der Lösung $\leq$ const $\times$ Supremumsnorm der rechten Seite
Allgemeines Prinzip:
1) Maximumsprinzip für Gleichung $Lx = f$
2) Konstruieren einfache Lösungen y
mit $Ly \geq f((Ly \geq 1) \to L(cy) \geq f)$
$L(x + y) \geq 0 \Rightarrow ||x||_\infty \leq ||y||_\infty \leq \eta||f||_\infty$
Allgemeinere Beweise für Maximumsprinzip
(1) $(px')' = f \to px' = \int_a^s f d\sigma + c_1$
$x(s) = \int_a^s \frac{1}{p(\sigma)}(\int_a^\sigma f(\eta)d\eta + c_1)d\sigma + c_2; c_1, c_2 \in RB$
Am Ende:
$x(s) = \int_a^b k(s,\sigma)f(\sigma)d\sigma + g(s)$
Vorzeichen von k und g entscheidend!
$\gamma, \delta > 0 \Rightarrow g(s) > 0$
$\gamma, \delta < 0 \Rightarrow g(s) < 0$
$k(s,\sigma) \leq 0$
$\gamma, \delta > 0, f < 0$

$x(s) = \int \underbrace{\underbrace{k(s,\sigma)}_{\leq 0}\underbrace{f(\sigma)}_{\leq 0}}_{\geq 0} d\sigma + \underbrace{f(s)}_{>0} > 0$

2.) Widerspruchsbeweis:
$(px')' > 0$, Annahme: Funktion hat ein Maximum in (a,b)
$x(s_0) \geq x(s) \forall s \in [a,b]$
$x'(s_0) = 0, x''(s_0) \leq 0$

$0 \leq (px')'(s_0) = p'(s_0)\underbrace{x'(s_0)}_{=0} + \underbrace{p(s_0)}_{\geq 0}\underbrace{x''(s_0)}_{\leq 0} =\leq 0$

$\Rightarrow$ Widerpsruch
$\Rightarrow$ x hat kein Maximum in (a,b) (starkes Maximumsprinzip)
Schwaches Maximumsprinzip $(px')' \geq 0$
Dann nimmt x sein Maximum am Rand an (also $\{a,b\}$)
Beweis: über Störungen: $x_n \to x$ gleichmäßig mit $(px_n')' > 0$
$\Rightarrow X_n$ hat Maximum am Rand
$\Rightarrow x$ hat Maximum am Rand
Wann gilt Max-Prinzip für
$Au = y, A \in R^n \times R^n m <\in R^n$
Monotonie: $y_k \geq 0 \forall j \Rightarrow u_j \geq 0 \forall j$
$y = e_k, u = A^{-1}y = A^{-1}e_k = k - te$ Spalte von A^{-1}.
k-ten Spalte von A^{-1} hat nur nichtnegative Einträge
Definiton: $A \in R^{n\times n}$ heisst M-Matrix, falls A regulär und A^{-1} nur nichtnegative Einträge hat.

11.12.2009

$(px')' = f$
Diskretisierung FD
$Au = f, u_j = x_\Delta(s_j)$
Maximumsprinzip $\Rightarrow L^\infty$ Stb.
$\Leftrightarrow$ A M-Matrix
Erinnerung: A ist M-Matrix, wenn A^{-1} existiert und nur nichtnegative Einträge hat.
Hinreichendes Kriterium für M-Matrix.
Lemma: $A \in R^{n\times n}$ mit $a_{ii} > 0 \forall i$
$a_{ij} \leq 0 \forall i + j$
schwachdiagonaldominant $a_{ii} \geq \sum_{j+i} (a_{ij})$
A regulär
Dann ist A eine M-Matrix
Beweis: $u_k = A^{-1}e_k = k$-te Spalte von A^{-1}. Müssen also zeigen $u_k \geq 0 \forall k$.
Widerspruchsbeweis: $\exists k : u_k \ngeq 0$
D.h. es existiert ein Index m mit $(u_k)_m < 0$
o.B.d.A: $(u_k)_m \leq (U_k)_j \forall j$
1.Fall:
$(u_k)_m = (u_k)_j$ für alle j
$= c$
$u_k = A^{-1}e_k \Leftrightarrow Au_k = e_k$
$\Rightarrow \sum_j a_{ij} \underbrace{(u_k)_j}_{=c<0} = (e_k)_i$
$i = k : c \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$
$c(a_{kk} + \sum_{j\neq k} \underbrace{a_{kj}}_{=-|a_{kj}|}) = 1$
$\Rightarrow \underbrace{c\,(a_{kk} - \sum_{j\neq k} |a_{kj}|)}_{\geq 0} = 1$ Widerspruch
2.Fall: es existiert:

j mit $(a_i)_j > (a_k)_m$
$\sum a_{ij}(a_k)_j = (e_k)_j$
$i = m : \sum a_{mj}(u_k)_j = (e_k)_m \geq 0$
$= a_{mm}(u_k)_m + \sum_{j+m} a_{mj}(a_k)_j$
$= a_{mm}(u_k)_m - \sum_{j\neq m} |a_{mj}|(u_k)_j$
$< [-(u_k)_j \leq -(u_k)_m]a_{mm}(u_k)_m - \sum_{j\neq m} |a_{mj}|(u_k)_m$
$0 \leq (u_k)_m(a_{mm} - \sum_{j\neq m} |a_{mj}|) \leq 0$
Widerspruch
A mit $a_{ii} > 0, a_{ij} \equiv 0, \sum_{i\neq j} |a_{ij}| \leq a_{ij}$
$N(A) \subset lin\{1\}$
d.h. $Au = 0 \Rightarrow u_j = c$ für ein $c \in R$
Korollar: A wie oben ist regulär, wenn $A1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \exists i : \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{a_{ij} - \sum_{i\neq j} |a_{ij}|} \neq 0$$

Beweis:
$Au = 0, U_m = \max_j u_j$, obda: $u_m > 0$
$\sum_{i=1}^{n} a_{mj}u_j = 0$
$0 = a_{mm}u_m - \sum_{j\neq m} |a_{mj}|u_j > (a_{mm} - \sum |a_{mj}|)u_m \geq 0$
Widerspruch, falls $u_j \neq u_m$ für ein j
$\Rightarrow u_j = u_m \forall j$
$\Rightarrow u \in \lim 1$

Analoge Eigenschaft für RWP
$(px')' = f, B_1x = \gamma, B_2x = \delta$
Nullraum: $(px')' = 0, B_1x = 0, B_2x = 0$
Falls $B_1x = x'(a) = 0, B_2(x) = x'(b) = 0$
$\Rightarrow$ Konstantes x im Nullraum
Konvergenz: $Lx = f, Lx = (px')'$
Diskretisierung auf äquidistanten Gitter $\rightarrow X_\Delta$
$u = (x_\Delta(s_j)), v = (x(s_j))$
wollen Abschätzung für $x_\Delta(s_j) - x(s_j)| \rightarrow$ d.h. für $||u - v||_\infty$
Am besten $||u - v||_\infty \leq C||v||_\infty$
Konsistenzfehler $r = Av - y$
Diskretisierung $Au = y$
Achtung: $Au = y$ ist diskrete Version von $-(px')' = -f$
Für Stabilitätskonstante C um $\tilde{x}$ mit $L\tilde{x} = -1, B_1\tilde{x} = B_1x, B_2\tilde{x} = B_2x$
$\tilde{v} = (\tilde{x}(s_j))$
Konsistenzordnung: $f = -1 \Rightarrow \tilde{y} = (1, ..1)^t$
$= A\tilde{v} - 1 = O(H^p)$
$Au = y, Av = y + r, A(c\tilde{v}) = c1 + cO(h^p)$
$A(u - v - c\tilde{v}) = -r - c1 + cO(h^p)$

c so gewählt, dass $\begin{cases} -r - c1 + cO(h^p) & \leq 0 \Rightarrow u - v \leq c\tilde{v} \\ -r - c1 + cO(h^p) & \geq 0 \Rightarrow u - v \geq c\tilde{v} \end{cases}$

(i) $c = 2||r||_\infty$

$$A(u - v - c\tilde{v}) = \underbrace{\underbrace{-r - ||r||_\infty 1}_{\leq 0} \underbrace{- ||r||_\infty 1}_{\geq 0} + \underbrace{2||r||_\infty O(h^p)}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$A(u - v - c\tilde{v}) \leq 0$
$\Rightarrow u - v - c\tilde{v} \leq 0$
$u - v \leq 2||r||_\infty \tilde{v}$

(ii) $c = -2||r||_\infty$
$\Rightarrow A(u - v - c\tilde{v}) \geq 0$
$\Rightarrow u - v \geq c\tilde{v} = -2||r||_\infty \tilde{v}$
$\Rightarrow -2||r||_\infty \tilde{v}_j \leq u_j - v_j \leq 2||r||_\infty \tilde{v}_j$
$\Rightarrow |u_j - v_j| \leq 2||r||_\infty |\tilde{v}_j|$
$\Rightarrow ||u - v||_\infty \leq \underbrace{2||\tilde{v}||_\infty}_{=C} ||r||_\infty$
$\tilde{v}$ unabhängig von h $\Rightarrow$ konstante C ist unabhängig von h.
Satz: $A^{\in} R^{n\times n}$ Matrix und $y \in R^n$ rechte Seite aus der Diskretisierung einer s RWP. Ist A M-Matrix für alle n, dann ist dies Verfahren stabil un die Konvergenzordnung entspricht der Konsistenzordnung.
Bsp: $x'' = f, x(a) = 0, x(b) = 0$
$-x'' = -f$
$D_2 x_\Delta = -f_\Delta = \frac{x_\Delta(s_{j+2}) - 2x_\Delta(s_j) + x_\Delta(s_{j-1})}{h^2}$
$n = N - 1, N = -1/h$ (elimieren $x_\Delta(s_0)$ und $x_\Delta(s_N)$)

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & .. & .. \\ -1 & 2 & -1 & .. \\ .. & -1 & 2 & -1 \\ .. & .. & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ .. \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(s_1) \\ ... \\ -s(S_{N-1}) \end{pmatrix}$$

A ist M-Matrix

15.12.2009

4.7 Finite Differenzen

$Lx = -(px')' + qx = f$
Diskretisierung
$Au = y$
Miximumsprinzip für L (L^∞-Stabilität) $\rightarrow$ M-Matrix A (l^∞-Stabilität)
Konsistente,monotone(A M-Matrix)
Diskretisierung => Konvergenz

Konvergenzordnung = Konsistenzordnung

Wie sieht A für allgemeines p,q aus?
$\underbrace{px''}_{D_2} + \underbrace{p'x'}_{D_c} + qx = f$
$s = s_i : p_i 1/h^2(x_\Delta(s_{i-1}) - 2x_\Delta(s_i) + x_\Delta(s_{i-1}) + p_i' 1/(2h)(x_\Delta(s_{i+1}) - x_\Delta(s_{i-1})) + q_i x_\Delta(s_i) = f_i$
$(p_i/h^2 + P_i'/2h)u_{i+1} - (2p_i/h^2 - q_i)u_i + (p_i/h^2 - p_i'/(2h))u_{i-1} = f_i$

$$\begin{pmatrix}(0 & .. & 0 & p_i/h^2 + P_i'/2h) & -(2p_i/h^2 - q_i) & (p_i/h^2 - p_i'/(2h) & 0 & .. & 0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ .. \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-f_i)\end{pmatrix}$$

4.8 M-Matrix Eigenschaft

$-q_{ii} > 0 : 2p_i > q_i h^2 \begin{cases} q_i \leq 0 & \text{immer erfüllt} \\ q_i > 0 & \text{für h klein genug} \end{cases}$
$a_{ij} \leq 0 : 2p_i + hp_i' \leq 0, -2p_i - hp_i' \leq 0 : hp_i' \leq 2p_i \rightarrow p_i'/p_i \leq 2/h; hp_i' \geq -2p_i \rightarrow p_i'/p_i \geq -2/h$
$-2/h \leq (logp)'(s_i) \leq 2/h$
$|logp'| \leq 2/h \rightarrow h \leq 2/(logp)'$
Problem, wenn $p(log(p))$ sehr steil wird $\rightarrow$ Extrem kleine Schrittweite nötig, um Stabilität zu bekommen.
- Diagonaldominanz $a_{ii} \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| = |a_{i,i+1}| + |a_{ii-1}|$
$\Rightarrow 2p_i/h^2 - q_i \geq \frac{2p_i - p_i' h}{2h^2} + \frac{2p_i + p_i' h}{2h^2} = 2p_i/h^2$
$\rightarrow q_i \leq 0$
Für $q \leq 0$ (RB eindeutig lösbar) erhalten wir eine M-Matrix, wenn h klein genug ist.
Für $q > 0$ analoge Störungstheorie wie für das RWP.

$A = \underline{B}_{M-Matrix} + \underline{D}_{Diagonalmatrix}$
Alternative für $||(logp)'||_\infty$ gross: Verfahren der Konsistenzordnung 1

4.9 Upwind-Verfahren:

Statt D_c für Disktretisierung von x' wählen wir D_+ oder D_- abhängig vom Vorzeichen von p'.
$px'' + p'x' + qx = f$
$D_+ : p_i D_2 x_\Delta(s_i) + p_i' 1/h(x_\Delta(s_{i+1}) - x_\Delta(s_i)) + q_i x_\Delta(s_i) = f_i$
$D_- : p_i D_2 x_\Delta(s_i) + p_i' 1/h(x_\Delta(s_i) - x_\Delta(s_{i-1}) + q_i x_\Delta(s_i) = f_i$
Wenn $p_i' \geq 0$, dann Vorwärtsdifferenzenquotienen D_+ verwenden
Wenn $p_i' \leq 0$, dann Rückwärtsdifferenzenquotienen D_- verwenden
$D_u^{p'}(x) = \max p_i', 0 D_+ x + \min p_i', 0 D_- x$
$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-p_i + max p_i', 0}{h^2} & 2p_i/h^2 - q_i + |p_i'|/h & \frac{-p_i - \max p_i', 0}{h^2} & 0 \end{pmatrix}$ M-Matrix für $q \leq 0$ für h beliebig.
Besonders wichtig: p nicht bekannt ist, sonder indirekt von x abhängt.
Beispiel: geladene Teilchen in elektrischen Feld, x Teilchendichte, E: elektrisches Feld, z Ladung:
$x'' + z(Ex') = 0.$
$E' = zx, E \to p$
Ausblick: Lösung partieller DGL
Bsp: 2D, u(x,y)
Poissongleichung: $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \in \Omega \in R^2$ mit RB: z.B $u(x,y) = f(x,y)$ für $(x,y) \in \partial\Omega$
Wärmeleitungsgleichung: in einer Raumdimension und in der Zeit $u(x,t)$
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (0,t), t \in (0,T)$
RB z.B: $u(a,t) = \gamma, u(b,t) = \delta, u(x,0) = u_0(x)$

4.10 Anfangswertproblem

4.10.1 Numerische Lösung:

Gitter: $\Delta = (x_i, y_i) \in \Omega$
Approximation von $\partial\Omega$:
$\partial\Delta = (x_i, y_j) \in \Omega | (x_{i+1}, y_j) \notin \Omega$, oder $(x_{i-1}, y_j) \notin \Omega$, oder $(x_i, y_{j+1}) \notin \Omega$, oder $(x_i, y_{j-1}) \notin \Omega$
Dort approximieren wir Randwerte, d.h. $u(x_i, y_j) - f(x_i, y_j)$ für $(x_i, y_j) \in \partial\Delta$.
Für $(x_i, y_i) \notin \partial\Delta$ approximieren wir die partielle DGL, z.B. Poissongleichung auf äquidistantem GItter $x_j = jh_1$, $y_j = jh_2$
$D_2^x u - D_2^y = f$
$-1/h_1^2(u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)) - 1/h_2^2(u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_{j-1})) = f_i$
Lineares Gleichungssystem für Werte $u(x_i, y_j)$
Vektor $U = u(x_i, y_i)$
$AU = y$
A ist M-Matrix
Zeile für(x_i, y_j): Diagonaleintrag $2/h_1^2 + 2/h_2^2 > 0$
4 Nebendiagonaleinträge $\neq 0$: $-1/h_1^2(2x), -1/h_2^2(2x)$
Wärmeleitung: Linienmethode: Diskretisierung zuerst im Ort auf Gitter $x_j = a + jh$
$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) = 1/h^2(u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))$
$\to u_i'(t) = 1/h^2(u_{i+1}(t) - 2_i(t) + u_{i-1}(t))$
System von gewöhnlichen DGL, AWP
$u'(t) = f(u(t), t)$
Lipschitzkonstante über $f \sim 1/h^2$
explizites Eulerverfahren hat Stabilitätskonstante $\approx e^{L/h^2}$
Zeitdikretisierung mit implizitem Eulerverfahren oder Crank-Nichelson

18.12.2009

4.11 Freie Randwertprobleme

Randwertproblem, bei denen ein Teil des Randes unbekannt ist, zusätzliche Gleichungen zur Bestimmung des Randes. Bsp: $-(px')'0 fin(a,b)$
$x(a)=0, x(b)=0$
Eindeutig lösbar für gegebenes a,b
Freier Rand, z.B. b frei
Typsischerweise zwei k Randbedingungen
z.B. $x'(b)=0$
Beispiel Übergang Eis-Wasser
Unbekannte Funktion $\mu(x,t)$ Temperatur
Wie stellt sich T ein?
(Wie verändert sich T in der Zeit?
Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial u}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ gilt in Eis und Wasser.
Auf $\Gamma: u=0$
zweite Randedingung?
In jeder Phase ist Energie abhängig von der Temperatur, Enthalpie (Energiedichte)
$e=\begin{cases} a_1 u+b_1 & \text{in Eis} \\ a_2 u+b_2 & \text{in Wasser} \end{cases}$
Vereinfachung: $a_1=a_2=1, b_1-b_2=L+0$
Eigentlich: Wärmeleitung durch Energietransport:
$\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$\Xi(x,t)=\begin{pmatrix} 1 & \text{Eis} \\ 0 & \text{Wasser} \end{pmatrix}$
$e(x,t)=u(x,t)+b_2+L\Xi(x,t)=\begin{cases} u+b_1 & Eis \\ u+b_2 & Wasser \end{cases}$
$\frac{\partial u}{\partial t}+L\frac{\partial \Xi}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
Im Inneren von Eis/Wasser : $\frac{\partial \Xi}{\partial t}=0 \Rightarrow$ Wärmeleitungsgleichung
$1D: \frac{\partial u}{\partial t}+L\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Betrachten: $\frac{\partial u}{\partial t}+L\frac{\partial \Xi}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} in(\xi(t)+\epsilon, \xi(t)-\epsilon)$
Integration $\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon}\frac{\partial u}{\partial t}dx+L\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon}\frac{\partial \Xi}{\partial t}dx=\frac{\partial u}{\partial x}(\xi(t)+\epsilon,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(\xi(t)-\epsilon,t)$
Was ist
$\frac{d}{dt}\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon} f(x,t)dx$
$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\int_{\xi(t)+\Delta t-\epsilon}^{\xi(t)+\Delta t+\epsilon} f(x,t+\Delta t)dx-\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon} f(x,t)dx)$
$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\int_{\xi(t)+\Delta t-\epsilon}^{\xi(t)+\Delta t+\epsilon} f(x,t+\Delta t)-f(x,t)dx+\int_{\xi(t)+\Delta t-\epsilon}^{\xi(t)+\Delta t+\epsilon} f(x,t)dx-\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon} f(x,t)dx)$
$=\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon}\frac{\partial f}{\partial t}f(x,t)dx+\lim_{\Delta t\to 0}(1/\Delta t\int_{\xi(t+\Delta t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon} f(x,t)dx-1/\Delta t\int_{\xi(t)+\Delta t-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon} f(x,t)dx)$
$\frac{\partial F}{\partial x}=f: 1/\Delta t\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t+\Delta t)+\epsilon} f(x,t)dx=\frac{F(\xi(t+\delta t+\epsilon,t)-F(\xi(t)+\epsilon,t)}{\delta t}$
$\xrightarrow{\Delta t\to 0} f(\xi(t)+\epsilon,t)\frac{d\xi}{dt}(t)$
Analog $1/\Delta t\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t+\Delta t)-\epsilon} f(x,t)dx=f(\xi(t)-\epsilon,t)\frac{d\xi}{dt}(t)$
$\frac{d}{dt}\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon} f(x,t)dx=\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx+f(\xi(t)+\epsilon)\frac{d\xi}{dt}(t)-f(\xi(t)-\epsilon)\frac{d\xi}{dt}$
$f=\xi: \int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon}\frac{\partial \Xi}{\partial t}dx=\frac{d}{dx}(\int_{\xi(t)-\epsilon}^{\xi(t)+\epsilon}\Xi(x,t)dx)-\Xi(\xi(t)+\epsilon)\frac{d\xi}{dt}+\Xi(\xi(t)-\epsilon,t)\frac{d\xi}{dt}=d/(dt)\int 1dx+\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{dt}(t)$
$f=u: \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon}\frac{\partial u}{\partial t}dx=\frac{d}{dt}(\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon}u(x,t)dx)-u(\xi+\epsilon,t)\frac{d\xi}{dt}+u(\xi-\epsilon)\frac{d\xi}{dt}$
Achtung: $u(\xi(t),t)=0$
(t) für $\epsilon\to 0: L\frac{d\xi}{dt}(t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\xi(t),t))-\frac{\partial u}{x}(\xi(t),t)$

Stationäre Lösung: $\frac{d\xi}{dt}=0$
$\frac{\partial u}{\partial t}=0$
$\frac{d\xi}{dt}=0\Rightarrow\frac{du}{dx}(\xi_+)=\frac{du}{dx}(\xi_i)$
$\frac{d^2u}{dx^2}=0\in(a,\xi)$ und (ξ,b)
$u(x)=c(x-\xi)$ in (a,ξ) und (ξ,b)
zwei unbekannte , cund $\xi\Rightarrow$ zu bestimmen aus Randwerten $u(a)=c(a-\xi), u(b)=c(b-\xi)$
$c=\frac{u(b)-u(a)}{b-a}$

$\xi = a - \frac{u(a)}{c}$

Energieminimierung unter $RBu(a) = u(b) = 0$
$E(u) = 1/2 \int_a^b u'(x)^2 dx$
Optimierung unter Nebenbedingungen $u(x) \geq h(x)$
u minimal
$E(u) \leq E(u + \epsilon\phi)$, falls $u + \epsilon\phi \geq h$
$\phi \geq 0$, falls $u = h$
$\phi(a) = \phi(b) = 0$
$0 \leq 1/\epsilon(E(u + \epsilon\phi) - E(u)) = 1/\epsilon \int ((u' + \epsilon\phi)^2 - (u')^2)dx = 2\int -u'\phi' dx + \epsilon \int (\phi')^2$
$0 \leq -2 \int u''\phi dx \to \int u''\phi dx \leq 0$

lokale Störung bei $u > h\epsilon$ klein: $u + \epsilon\phi \geq h, u - \epsilon\phi \geq h$
$\int u''\phi \leq 0, -\int u''\phi \leq 0 \Rightarrow \int u''\phi = 0 \to u'' = 0$, wenn $u(x) > h(x)$

$u = h \to$ Störung $\phi \geq 0$ zulässig $(u + \epsilon\phi \geq 0)$
$\int u''\phi \leq 0 \to u'' \leq 0$ wenn $u(x) = h(x)$
Hindernisproblem: $u \geq h$ in (a, b)
$u'' \leq 0$ in (a, b)
$u(a) = u(b) = 0$
$u''(u - h) = 0$ in (a, b)

05.01.2010

5 Buch Teil 1, Kapitel 8

Grosse Symmetrische lineare Gleichungssysteme
$Ax = b, A \in R^{n\times n}, b \in R^n$
A dünnbesetzt (Spairse),d.h. Anzahl der Nichtnullelementen in $A \ll n^2$ (Typischerweise $O(n)$)
n gross
Zerlegungen (LR,QR,Cholesky) haben hohen Aufwand $O(n^3)$, nutzen Dünnbesetztheit nicht aus.
Eventuell hoher Speicherbedarf $O(n^2)$
z.B. $A = QR$
A dünnbesetzt, trotzdem Anzahl der Nichtnullelemente in Q von der Ordnung n^2.
Direkte Verfahren $x = A^{-1}b$ „exakt“ bis auf Fehlerfortpflanzung
Relative Genauigkeit = K(A) * Maschinengenauigkeit
Oft ist aber Konditionszahl von A abhängig von A bzw. sehr gross für n gross
Bei Diskretisierung eins RWP $(px')' + qx = f$ mit n Gitterpunkten entsteht Maxtrix A mit $K(A) = O(n^2)$.
$n \approx 10^4 \to n^2$ Maschinengenauigkeit $\approx 10^{-8}$
D.h. wir wollen nur eine Lösung mit Genauigkeit $\epsilon \gg$ Maschinengenauigkeit
Alternative Iterative Verfahren
In jedem Interationsschritt: Multiplikation Ax oder $A^T x \to O(n)$ für dünnbesetzte Matrizen
Speicherbedarf O(n), nur A, b, x^k
Aufwand $O(k_{max} * n), K_{max} =$ Anzahl der Iterationen
Umso grösser ϵ, umso weniger Iterationen k_{max} nötig. In der Praxis meist $k_{max} \ll n^2$

5.1 8.1 Klassische Interationsverfahren

Fixpunktiteration
$Ax = b \Leftrightarrow 0 = Q^{-1}(b - Ax)$
$\Leftrightarrow x = x + Q^{-1}(b - Ax) = \underbrace{(I - Q^{-1}A)}_{=G} x + \underbrace{Q^{-1}b}_{=c}$
$x = Gx + c$
$x^{k+1} = Gx^k + c - F(x^k)$

Banach'scher FPS: F: $R^n \to R^n$, F kontrahiert $\Rightarrow x^k \to \overline{x}$ Fixpunkt + Fehlerabschätzung
$||x^k - \overline{x}|| \leq L^k c$
$L < 1$ Lipschitzkonstante
$||F(x) - F(y)|| = ||Gx + c - Gy - c|| = G(x-y)|| \leq ||G||||x-y||$
Kontraktivität, falls $||G|| < 1$

5.2 Satz 8.0:

$G \in R^{n \times n}$, $||G|| < 1$ in einer Matrixnorm.
Dann konvergiert die Iteration $x^{k+1} = Gx^k + c$ für jeden Startwert $x^0 \in R^n$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} = G\overline{x} + c$

5.3 Satz 8.1:

$G \in R^{n \times n}$, $\rho(G) := \max_j |\lambda_j(G)| < 1$.
Dann konvergiert die Iteration $x^{k+1} = Gx^k + c$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} = G\overline{x} + c$.
Beweis: (für G symmetrisch)
G symmetrisch $\to \exists Q$ orthogonal
$QGQ^T = \Lambda = diag(\lambda_i)$
$\lambda_i EW$ von G
$x^{k+1} = Gx^k + c, \overline{x} = G\overline{x} + c$
$x^{k+1} - \overline{x} = G(x^k - \overline{x})$
$||x^{k+1} - \overline{x}|| = ||G(x^k - \overline{x}|| = ||Q^T \Lambda Q(x^k - \overline{x}|| = ||Q^T \Lambda Q Q^T \Lambda Q(x^{k-1} - \overline{x})||$
$||x^{k+1} - \overline{x}|| = ||Q^T \Lambda^2 Q(x^{k-1} - \overline{x})|| = ||Q^T \Lambda^{k+1} Q(X^+ - \overline{x})|| = ||Q^T \Lambda^{k+1} y||$
$= [Q^T orthogonal]||\Lambda^{k+1} y||$
$||(diag(\lambda_j^{k+1}))y|| = ||\lambda_j^{k+1} y_j|| = ||\underbrace{|\lambda_j|^{k+1}}_{\rho(G)^{k+1}} |y_j||| \leq \underbrace{\rho(G)^{k+1}}_{\to 0 da \rho(G)<1} ||y||$
$\Rightarrow ||x^{k+1} - \overline{x}|| \leq \rho(G)^{k+1} ||y||$
Es gilt: $\rho(G) \leq ||G||$ für jede Matrixnorm
$||G|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Gx||}{||x||} \geq \frac{||Gx_j||}{||x_j||} = \frac{||\lambda_j x_j||}{||x_j||} = |\lambda_j| \frac{||x_j||}{||x_j||}$
für x_j EV zum EW $\lambda_j, Gx_j = \lambda_j X_j$
$||G|| \geq \max_j |\lambda_j| = \rho(G)$

5.4 Iterative Verfahren:

$x^{k+1} = Gx^k + c = x^k + Q^{-1}(b - Ax^k)$

5.4.1 RICHARDSON-Verfahren:

$Q^{-1} = \tau I, \tau \in R$
$x^{k+1} = x^k - \tau A x^k + \tau b$
- Konvergenz: $G = I - \tau A$
$\rho(G) < 1$?
μ_j EW von A mit EV x_j
$\Leftrightarrow 1 - \tau\mu_j$ EW von G, $Ax_j = \mu_j x_j$
$x_j - \tau A x_j = x_j - \tau\mu_j x_j$
$Gx_j = (I - \tau A)x_j = (1 - \tau\mu_j)x_j$
Brauchen: $|1 - \tau\mu_j| < 1$ für alle j
alle $\mu_j > 0$, $\tau > 0$
$-1 < 1 - \tau\mu_j < 1$
$\tau\mu_j < 2$
$\tau < \frac{2}{\mu_j}, \forall j \Leftrightarrow \tau < \frac{2}{\max_j \mu_j} = \frac{2}{\rho(A)}$
$\mu_j < 0, \tau < 0, \tau > \frac{2}{\min_j \mu_j} = -\frac{2}{\rho(A)}$

$Re(\mu_j) > 0, Re(\mu_k) < 0$
$|1 - \tau\mu_j| < 1, (1 - \tau Re(\mu_j))^2 + (\tau Im(\mu_j))^2 < 1$
$|1 - \tau\mu_k| < 1, (1 - \tau Re(\mu_j))^2 + (\tau \Im(\mu_k))^2 < 1$
$\tau > 0, 1 - \tau Re\mu_k > 1$
$\tau < 0, 1 - \tau Re\mu_j > 1$
$\Rightarrow$ Für jedes τ gilt $\rho(G) > 1 \rightarrow$ nicht konvergent!
Richardson-Verfahren konvergiert, wenn $Re(\mu_j)$ und $|\tau|$ klein genung ist und mit richtigem Vorzeichen $sign(\tau) = sign(Re(\mu_j))$
Insbesondere für A symmetrische-positive-definit, Konvergens für $\tau \in (0, \frac{2}{\rho(A)}$
Konvergenzgeschwindigkeit
$||x^{k+1} - \overline{x}|| \leq \rho||x^k - \overline{x}||$
$\rightarrow$ lineare Konvergenz
$\rho(G) = \max_j |1 - \tau\mu_j| = \max |1 - \tau\lambda_{max}(A)|, |1 - \tau\lambda_{min}(A)|$
K(A) gross, $1 - \tau\lambda_{min}(A) > 0$
$\tau < \frac{2}{\rho(A)} = \frac{2}{\lambda_{max}(A)}$
$\lambda_{max}(A)\tau < 2$
$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\lambda_{min}(A)\tau < 2$
$\Rightarrow \lambda_{min}\lambda < \frac{2}{K_2(A)} < 1$
$|1 - \tau\lambda_{min}| = 1 - \tau\lambda_{min}$
$\tau < \frac{2}{\lambda_{max}} > 1 - 2\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$
$= 1 - \frac{2}{K_2(A)} = \frac{K_2(A)-2}{K_2(A)}$
$\rho(G) \geq 1 - \tau\lambda_{min} > \frac{K_2(A)-2}{K_2(A)} \approx 1$ für $K_2(A)$ gross

5.4.2 Jacobi-Verfahren:

$Q = diag(a_{ii})$
$A = L + D + R$
A symmetrisch $\Rightarrow R = L^t$
D Diagonalmatrix, L = linke untere Dreiecksmatrix
$Q = D$
$x^{k+1} = x^k + D^{-1}(b - Ax^k)$
$= D^{-1}(Dx^k - Ax^k + b)$
$= D^{-1}(Dx^k - Dx^k - Lx^k - Rx^k + b)$
$x^{k+1} = D^{-1}(b - (L + R)x^k)$
$x^{k+1} = 1/a_{ii}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^k$

09.01.2010

$Ax = b \Leftrightarrow x = x - Q^{-1}(Ax - b)$
$x^{k+1} = x^k - Q^{-1}(Ax^k - b)$
$= Gx^k + c$
Konvergenz $||G|| < 1$
oder $\rho(G) < 1$
Richardson-Iteration: $Q^{-1} = \tau I$
Jacobi-Iteration: $Q = D, A = L + R + D$

5.5 Satz 8.2:

Das Jacobi-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in R^n$, wenn A strikt diaognaldominant ist.
$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$
Beweis: $G = I - Q^{-1}A = I - D^{-1}(L + R + D)$
$= -D^{-1}(L + R)$

Sup-Norm in R^n, Zeilensummennorm in $R^{n\times n}||D^{-1}(L+R)||_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0 & a12/a_{11} & & a_{1n}/a_{11} \\ .. & & & \\ a_{1n}/a_{11} & .. & a_{n-1,n-1} & 0 \end{pmatrix} \right\| =$

$\max_j \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$
$= \max_i 1/|a_{ii}| \sum_{j\neq i} |a_{ij} < 1$

Implementierung:
$x_i^{k+1} = -\sum_{jneqi} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}$
$x_1^{k+1} = -\sum_{jneq1} \frac{a_{ij}}{a_{11}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{11}}$
$x_2^{k+1} = -\sum_{jneq2} \frac{a_{ij}}{a_{22}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{22}}$
Alternative:
$x_1^{k+1} = -\sum_{jneq1} \frac{a_{ij}}{a_{11}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{11}}$
$x_2^{k+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{k+1} - \sum_{j>2} \frac{a_{ij}}{a_{11}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{11}}$
..
$x_i^{k+1} = -\sum_{j<i} \frac{a_{ij}}{a_i} x_j^{k+1} - \sum_{j>i} \frac{a_{ij}}{a_{11}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{11}}$
(Gauss-Seidel-Verfahren)
$a_{11}x_1^{k+1} = -\sum_{j>1} a_{ij}x_j^k + b_1$
$a_{21}x_2^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = -\sum_{j>2} a_{2j}x_j^k + b_2$
..
$\sum_{j\leq i} a_{ij}x_j^{k+1} = -\sum_{j>i} a_{ij}x_j^k + b_j$
Matrix-schreibweise:
$(D+L)x^{k+1} = -Rx + b$
$x^{k+1} = -(D+L)^{-1}Rx^k + (D+L)^{-1}b$
$Q = D + L$
$G = -(D+L)^{-1}R$
Konvergenzbetrachtung in einem geänderten Skalarprodukt.
M spd: $(x,y)_M = y^T Mx$
Transponierte Matrix: $y^T Ax = (A^T y)x \forall x, y \in R^n$
Adjungierten Matrix: Skalarprodukt induziert durch M: $(Bx,y)_M = (x, B^* y)_M \forall x, y \in R^n$
B^* adjungierte Matrix
B sei selbstadjungiert: $B = B^*$
B positiv in $(.,.)_M$: $(Bx,x)_M > 0 \forall x \in R^n$

Adjungierte Matrix:
$(Bx,y)_M = y^T MBx - (y^t MBM^{-1})Mx = (B^* y)^T Mx, B^* = M^{-1}B^T M$

5.6 Lemma 8.3

$G \in R^{n\times n}$, G^* adjungierte Matrix in $(.,.)_M$
Falls $B = I - G^*G$ positiv ist, dann gilt $\rho(G) < 1$
Beweis: B positiv
$0 < (Bx,x) = (x - G^*Gx, x) = (x,x) - \underbrace{(G^*Gx,x)}_{(Gx,Gx)} = ||x||_M^2 - ||Gx||_M^2$

$\Leftrightarrow ||x||_M > ||Gx||_M \forall x \neq 0$
$\rho(G) \leq ||G||_M = \sup_{x\neq 0} \frac{||Gx||_M}{||x||_M} < 1$

5.7 Satz: 8.4:

Das Gauss-Seidel-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x^0 \in R^n$, falls A spd ist.
Beweis: $G = -(D+L)^{-1}R = I - (D+L)^{-1}A$

nach Lemma 8.3 betrachen wir $I - G^*G$
$M = A$
$G^* = A^{-1}G^TA = A^{-1}(I - (D+L)^{-1}A)^TA$
$= A^{-1}(I - A(\underbrace{D^T}_{=D} + \underbrace{L^T}_{=R})^{-1})A$
$(A^{-1} - (D+R)^{-1})A = I - (D+R)^{-1}A$
$B = I - G^*G = I - (I - (D+R)^{-1}A)(I - (D+L)^{-1}A)$
$= I - (I - (D+R)^{-1}A - (D+L)^{-1}A + (D+R)^{-1}A(D+L)^{-1}A)$
$= (D+R)^{-1}(I + (D+R)(D+L)^{-1} - A(D+L)^{-1})A$
$= (D+R)^{-1}(D + \underbrace{L+D+R}_{=A} - A)(D+L)^{-1}A$
$= (D+R)^{-1}D(D+L)^{-1}A$
$(Bx,x)_A = x^TA(D+R)^{-1}D(D+L)^{-1}Ax$
$= ((D+L)^{-1}Ax)^TD\underbrace{(D+L)^{-1}Ax}_{=y\neq 0}$
$= y^TDy = \sum d_{ii}y_i^2 > 0$
Lemma 8.3 $\Rightarrow \rho(G) < 1 \Rightarrow$ Konvergenz

5.8 Relaxierung von FP-Iterationen

Richardson: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b) = (1-\tau)x^k + \tau(x^k - Ax^k + b)$
Allgemein: statt $x^{k+1} = Gx^k + c$
relaxierte Version: $x^{k+1}(1-\omega)x^k + \omega(Gx^k + c)$
$\omega \in (0,1]$: Dämpfungsparameter
$\omega > 1$ Überrelaxieren
$x^{k+1} = \omega(Gx^k + c) + (1-\omega)x^k$
$= \underbrace{(\omega G + (1-\omega)I)}_{G_\omega}x^k + \omega c$
Ideal: ω so zu wählen, dass das Verfahren möglichst schnell konvergiert.
Fehler geht mit $\rho(G_\omega)^k \to 0$
ω so zu wählen, dass $\rho(G_\omega)$ minimal

12.01.2010

$x_{k+1} = Gx_k + c \to x_{k+1} * \omega Gx_k + \omega c + (1-\omega)x_k$
$\omega \in (0,1], \omega = 1$: FP-Iteration

5.9 Def. 8.5

Fixpunktiteration $x_{k+1} = Gx_k + c$, wobei $I = G(A) \sim$ spd. Matrix für A spd
d.h. $\exists W = W(A), W(I - G(A))W^{-1}$spd

5.10 Bsp: 8.6:

Richardson $G(A) = I - A$ symmetrisch, $I - G(A) = A$, spd
Jacobi: $G = I - D^{-1}A, I - G = D^{-1}A$
$W = D^{1/2}, D = diag(a_{11}, .., a_{nn})$
$W(I-G)W^{-1} = D^{1/2}D^{-1}AD^{-1/2} = D^{-1/2}AD^{-1/2} = (D^{-1/2}AD^{-1/2})^T = (D^{-1/2})^TA(D^{-1/2})^T = D^{-1/2}AD^{-1/2}$
$x^T(D^{-1/2}AD^{-1/2})x = (\underbrace{D^{-1/2}x}_{=y})^TA(D^{-1/2}x) = y^TAy > 0$ für $y \neq 0$

5.11 Lemma 8.7:

$x_{k+1} = Gx_k + c$, sei symmetriesierbar.
Dann sind für A spd die Eigenwerte von G(A) reell und $\lambda < 1$

Konvergenz des Verfahrens für $(\lambda_i) < 1$
D.h. wir müssen nun erzwingen, dass $EW > -1$ sind
Relaxierung: $G_\omega = \omega G + (1-\omega)I$
$\lambda_i(G_\omega) = \omega\lambda_i(G) = (1-\omega) < \omega + (1-\omega) < 1$
$\lambda_i(G_\omega) > \omega\lambda_{min}(G) + (1-\omega) > -1$
$2 > \omega(1-\lambda_{min}(G))$
$\omega < \frac{2}{1-\lambda_{min}(G)}$
$\lambda_{min}(G) > -1 \rightarrow \omega = 1$ erlaubt
$\lambda_{min}(G) < -1 \rightarrow \omega 1$ nötig
FP-V symmetrisierbar ist $\rightarrow$ Relaxiertes PF-Verfahren konvergiert für $0 < \omega < \frac{2}{1-\lambda_{min}(G)}$
Was ist die optimale Wahl von ω?
Wehlerabschätung: $||x_{k+1} - \overline{x}|| \leq \rho(G_\omega)||x_k - \overline{x}|| \leq \rho(G_\omega)^{k+1}||x_0 - \overline{x}||$
schnellste Konvergenz, wenn $\rho(G_\omega)$ minimal
$\rho(G_\omega) = \max|1-\omega(1-\lambda_{min}(G))|, |1-\omega(1-\lambda_{max}(G))|$
$\overline{\omega} = \min_{0\leq\omega\leq 1}\rho(G_\omega)$ gesucht.
$0 < 1-\lambda_{max}(G) \leq 1-\lambda_{min}(G)$
$1-\omega(1-\lambda_{max}(G)) \geq 1-\omega(1-\lambda_{min}(G))$
Fallunterscheidung:

1.Fall: beide positiv: $\rho(G_\omega) = 1-\omega(1-\lambda_{max}(G))$

2.Fall: beide negativ: $\rho(G_\omega) = 1-\omega(1+\lambda_{min}(G))$

3.Fall: verschiedene Vorzeichen: $\rho(G_\omega) = \max 1-\omega(1-\lambda_{max}(G)), 1-\omega(1-\lambda_{min}(G))$

Optimal: $-1+\overline{\omega}(1-\lambda_{min}(G)) > 0$
$1-\overline{\omega}(1-\lambda_{max}(G)) > 0$
$\frac{1}{1-\lambda_{max}(G)} > \overline{\omega} > \frac{1}{1-\lambda_{min}(G)}$
Falls $-1+\overline{\omega}(1-\lambda_{min}(G)) = \rho(G_\omega) > 1-\overline{\omega}(1-\lambda_{max}(G))$
$\omega = \overline{\omega} - \epsilon, \epsilon >=$ KLEIN GENUNG
$-1+(\overline{\omega}-\epsilon)(1-\lambda_{min}(G)) < -1+\overline{\omega}(1-\lambda_{min}(G))$
aber $-1+(\overline{\omega}-\epsilon)(1-\lambda_{min}(G)) < 1-(\overline{\omega}-\epsilon)(1-\lambda_{max}(G))$
d.h. $\rho(G_{\overline{\omega}}) - 1 + (\overline{\omega} - epsilon)(1-\lambda_{min}(G))$
Widerspruch zur Optimalität von ω.
Analog Widerspruch, falls
$1-\overline{\omega}(1-\lambda_{max}(G)) = \rho(G_{\overline{\omega}}) > -1+(1-\lambda_{min}(G))$
Betrachte $\overline{\omega} - \epsilon$
D.h. $\overline{\omega}$ optimal
$\Rightarrow 1-\overline{\omega}(1-\lambda_{max}(G)) = -1+\overline{\omega}(1-\lambda_{min}(G))$
$\overline{\omega} = \frac{2}{2-\lambda_{max}(G)-\lambda_{min}(G)}$

SOR-Verfahren:

Successive Overrelaxation:
Gauss-Seidel: $(D+L)x^{k+1} = b - Rx^k$
$x^{k+1} = \omega(D+l)^{-1}b - \omega(D+L)^{-1}Rx^k + (1-\omega)x^k$
$(D+L)x^{k+1} - \omega b - \omega Rx^{k+1} + (1-\omega)(D+L)x^k$
SOR
$(D+\omega L)x^{k+1} = \omega b - \omega Rx^{k+1} + (1-\omega)Dx^k$
A spd $\rightarrow$ Konvergenz für $\omega \in (0,2)$
Überrelaxierung, $\omega \in (1,5;2)$, Beschleunigung des Gauss-Seidel-Verfahrens

5.12 8.3 Verfahren der konjugierten Gradienten (CG)

Konstruiere eine Folge von Teilräumen $U_k \subset \mathbb{R}^n$
$dim U_k = k$

Wählen Startwert x_0
$V_k = x_0 + U_k$
x_k Lösung von $||x_k - \overline{x}|| = \min_{y \in V_k} ||y - \overline{x}||$
$\overline{x}$ Lsg von $Ax = b$
Gute theoretische Eigenschaft:
$V_n = x_0 + U_n$, $dim U_n = n$, $U_n \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow U_n = \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow V_n = \mathbb{R}^n$
$||x_n - \overline{x}|| = \min_{y \in V_n} ||y - \overline{x}|| = 0$
Also ist $x_n = \overline{x} \Rightarrow$ Konvergenz in n Schritten
Was ist passende Norm?
Betrachten $(.,.)_B, ||x||_B = \sqrt{(x,x)_B}$
$||x_k - \overline{x}||_B = \min_{y \in V_k} ||y - \overline{x}||_B$
$\Rightarrow x_k$ ist orthogonale Projektion von $\overline{x}$ auf V_k.
$(x_k - \overline{x}, u)_B = 0, \forall u \in U_k$
$(x_k - \overline{x})^T B u = 0$
$B(x_k - \overline{x})u = 0$
Für $B = A : B(x_k - \overline{x}) = Ax_k - A\overline{x} = Ax_k - b = -r_k$
Residuen orthogonal zu U_k.
Bem.: $||x_k - \overline{x}||_A = \min_{y \in V_k} ||y - \overline{x}||$ heisst Ritz-Galerkin Approximation
$P_1, .., P_k$ sei Orthogonalbasis von U_k
$x_k = P_k \overline{x} = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{(p_j, \overline{x} - x_0)_A}{(p_j, o_j)_A}$
$x_k = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j^T A(\overline{x} - x_0)}{(p_j, p_j)_A}, p_j = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j^T r_0}{(p_j, p_j)_A} p_j$
$r_0 = b - Ax_0$
$x_k - \underbrace{x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j p_j}_{=x_{k-1}} + \alpha_k p_k$
$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$
$r_k = b - Ax_k = b - Ax_{k-1} - \alpha_k A p_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$
Satz von Caly-Hamilton (LA)
$\exists P_{n-1}$ Polynom Grad $n-1$
$A^{-1} = P_{n-1}(A)$
$\overline{x} - x_0 = A^{-1}(b - Ax_0) = A^{-1} r_0 + P_{n-1}(A) r_0$
Am Ende: $\overline{x} - x_0 \in U_n - span\{r_0, .., A^{n-1} r_0\}$
Idee $U_k = span\{r_0, .., A^{k-1} r_0\}$ Krylov-Unterräume

15.01.2010

CG-Verfahren $U_k = span\{p_1, .., p_n\}$
$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$
$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$
Satz von Cayley-Hamilton $A^{-1} = P_{n-1}(A), A^{-1} r_0 = x - x_0 = P_{n-1}(A) r_0$
$U_k = span\{r_0, Ar_0, .., A^{n-1} r_0\} = U_k(Ax_0)$
$V_k = x_0 + U_k$ Keylov-Unterräume

5.12.1 Lemma 8.15:

$r_k \neq 0$, Dann sind die Residuen $r_0, .., r_k$ paarweise orthogonal, d.h. $r_i^T r_j = \delta_{ij} r_i^T r_i; i, j = 0, .., k$ und spannen den Raum U_{k+1} auf.
Beweis: Induktion:
$k = 0 : U_1 = span\{r_0\}$
$k > 1$: Beh.: richtig für $k = 1$, d.h. $r_0, .., r_k$ seien paarweise orthogonale Basis von U_k
$r_k = r_{k-1} - \alpha A P_k = span\{r_0, .., A^{k-1} r_0\}$
$Ap_k \in AU_k = span\{Ar_0, .., A^k r_0\}$
$\Rightarrow r_k = r_{n-1} - \alpha_k A P_k \in span\{r_0, ..., A^k p_0\} = U_{k+1}$

Nach Konstruktion von x_k/r_k gilt
$r_k^T u = 0, \forall u \in U_k$
$r_k^T r_j = 0$ für $j < k$, da $r_j \in U_k$
Orthogonalbasis von U_{k+1}
Konstanten der p_k
$r_0 \neq 0 : P_1 = r_0$
$k > 1; r_k = 0 \to x_k$ Lösung von $Ax = b$
$r_k \neq 0$: r_k linear unabhängig zu $P_1, .., P_k$
$p_{k+1} = r_k - \sum_{j=1}^{k} \frac{(r_k, p_j)_A}{(p_j, p_j)_A} p_j$ (Projektion von r_k auf Orthogonalkomplement von U_k)
$(p_{k+1}, p_j)_A = 0$ für $j \leq k$

5.12.2 Algorithmus 8.16 (CG-Verfahren)

$x_0 \in R^n, p_1 = r_0 = b - Ax_0$
Iteration über k bis Abbruchbedingung erfüllt: $(||r_k|| < \epsilon)$
$\alpha_k = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{(p_k, p_k)_A} = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{p_k^T A p_k}$
$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$
$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$
$\beta_{k+1} = \frac{(r_k^T p_k)_A}{(p_k, p_k)_A} = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}}$
$P_{k+1} = r_k + \beta_{k+1} p_k$
$\beta_{k+1} = \frac{(r_k, p_k)_A}{(p_k, p_k)_A}$
$\alpha_k = \frac{p_k^T r_0}{(p_k, p_k)_A}, p_k^T r_0 = p_k^T (b - Ax_0) = p_k^T A(\overline{x} - x_0) = (p_k, x - x_0)_A = (p_k, \overline{X} - X_1 + \alpha_1 P_1)_A = (p_k, x - \overline{x}_1)_A +$
$\alpha_1 (p_k, p_1)_A$
$= (p_k, \overline{x} - x_1)_A = .. = (p_k, \overline{x} - x_{k-1})_A = p_k^T \underbrace{A(\overline{x} - x_{k-1})}_{b - Ax_{k+1}} = p_k^T r_{k-1}$

$x_1 = x_0 + \alpha_1 p_1$
$p_k^T r_0 = p_k^T r_{k-1} = (r_{k-1} + \beta_k p_{k-1})^T r_{k-1} = r_{k-1}^T r_{k-1} + \beta_k \underbrace{p_{k-1}^T}_{\in U_{k-1}} \underbrace{r_{k-1}}_{\perp U_{k-1}} = r_{k-1}^T r_{k-1}$

5.12.3 Satz: 8.17:

x_k erzeugt durch CG-Verfahren
$||\overline{x} - x_k||_A \leq 2(\frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} - 1})^k ||\overline{x} - x_0||_A$

5.13 8.4 Vorkonditionierung

$Ax = b \to \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$
$K_2(\tilde{A}) \ll K_2(A)$
linke Vorkonditionierung $\underbrace{PA}_{\tilde{A}} x = \underbrace{Pb}_{\tilde{b}}$
rechte Vorkonditionierung $\underbrace{AB}_{\tilde{A}} \tilde{x} = b, \tilde{x} = B^{-1} x$

A spd., P oder B spd
$K_2(PA), K_2(AB)$?
λEW von PA
$PAx = \lambda x$ für ein $x \neq 0$
$Ax = \lambda P^{-1} x$ verallgemeinertes EW-Problem
$y = p^{-1/2} x, pspd \Rightarrow p^{-1} spd, \Rightarrow \exists p^{-1/2}, p^{-1}) p^{-1/2} p^{-1/2}$
$p^{1/2} A p^{1/2} p^{1/2} x = \lambda p^{-1/2} x$
$(p^{1/2})^T A p^{1/2} = \lambda y$
λ ist EW von $(P^{1/2})^T A p^{1/2}$ spd
$\Rightarrow \lambda \in R_+$
$K_2(PA) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(PA)}{\lambda_{min}(PA)}}$
analog ist λ EW von AB auch EW von $((B^{1/2})^T A B^{1/2})$

$\tilde{A} = AB$ ist selbstadjungiert und positiv in $(.,.)_B$
$(x, \tilde{A}y)_B = x^T ABy = x^T B^T A^T By = (ABx)^T By$
$= (\tilde{A}x, y)_B$
$(x, \tilde{A}x)_B = x^T BABx = (Bx)^T A(Bx) \overset{y=Bx}{=\!=} y^T Ay > 0$, da A spd
Vorkonditionierte Verfahren:
Bsp.: Richardson-Iteration:
$x_{k+1} = x_k - (ABx_k - b)$
$\tilde{x} = Bx_k$
$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - (BA\tilde{x}_k - Bb)$
Analog Richardson-Iteration mit Vorkonditionierung von links.
$x_{k+1} = x_k - (PAx_k - Pb)$
$P^{-1/2}x_{k+1} = P^{-1/2}x_k - (P^{1/2}Ap^{1/2}P^{-1/2}x_k - P^{1/2}b)$
$y_{k+1} = y_k - (P^{1/2}Ap^{1/2}y_k - P^{1/2}b)$
Für tranformierte Variable $y_k = p^{-1/2}x_k$ standard Richardson-Verfahren mit spd-Matrix
$||y_k - \overline{x}|| \leq (\frac{K_2(P^{1/2}Ap^{1/2})-1}{K_2(P^{1/2}Ap^{1/2})+1})^k ||y_0 - \overline{y}||$
$||p^{-1/2}(x_k - \overline{x})|| \underbrace{\leq}_{y_k = P^{-1/2}x_k} (\frac{K_2(PA)-1}{K_2(PA)+1})^k ||P^{-1/2}(x_0 - \overline{x})|| \leq (\frac{K_2(PA)-1}{K_2(PA)+1})^k ||x_0 - \overline{x}||_{P^{-1}}$
$||P^{-1/2}z|| = \sqrt{(P^{-1/2}z)^T P^{-1/2}z} = \sqrt{z^T P^{-1/2}P^{-1/2}z} = \sqrt{z^T p^{-1}z} = \sqrt{(z,z)_{P^{-1}}} = ||z||_{P^{-1}}$

19.01.2010

$Ax = b$, Konvergenzfaktor wächst mit $K_2(A)$.
$PAx = Pb \to K_2(PA)$
$AB\tilde{x} = b \to K_2(AB)$
Konvergenz-Richardson-Verfahren
$||x - x_k|| \leq \frac{K_2(AB)-1}{K_2(AB)+1}^K$, oder $||x - x_k|| \leq \frac{K_2(PA)-1}{K_2(PA)+1}^K$
c Konstante, die Normäquivalenz zwischen Euklidischer Norm und der von B/p^{-1} induzierten beschreibt.

5.14 Satz 8.22: Für CG-Verfahren mit Vorkonditionierung (PCG)

$||x - x_k||_A \leq 2\frac{\sqrt{K_2(AB)}-1}{\sqrt{K_2(AB)}+1}||x - x_0||_A$
Voraussetzungen für Vorkonditionierung B/P

a) $K_2(AB)$ bzw. $K_2(PA)$ möglichst klein

b) $y \to By$ bzw. $y \to Py$ „effizient“ berechenbar.

Wahl des Vorkonditionierens beruht auf möglichst gutem Kompromiss zwischen a) und b).

5.15 Lemma: 8.23:

Falls für μ_0, $\mu_1 > 0$ eine der folgenden drei äquivalenten Bedingungen gilt:

(i) $\mu_0(y,y)_{A^{-1}} = y_0 y^T A^{-1} y \leq y^T By = (y,y)_B$
$(y,y)_B \leq \mu_1(y,y)_{A^{-1}}$

(ii) $\mu_0(y,y)_B \leq (y,y)_{BAB}$

(iii) $\lambda_{min}(AB) \geq \mu_0, \lambda_{max}(AB) \leq \mu_1$

Dann gilt: $K_2(AB) \leq \frac{\mu_1}{\mu_0}$
Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$ $y = Au$ in (i)
$(y,y)_{A^{-1}} = (Au, Au)_{A^{-1}} = (Au)^T A^{-1} Au = (u,u)_A$
$y = A^{1/2}B^{1/2}u$
$(y,y)_{A^{-1}} = (A^{1/2}B^{1/2}u)^T A^{-1} A^{1/2}B^{1/2}u = u^T B^{1/2}A^{1/2}A^{-1}A^{1/2}B^{1/2}u = u^T Bu = (u,u)_B$
$(y,y)_B = y^T By^T = u^T B^{1/2}A^{1/2}BA^{1/2}Bu$

$(i) \Rightarrow (u,u)_B \leq (u,u)_{B^{1/2}A^{1/2}BA^{1/2}B} \leq \mu_1 (u,u)_B$
$(ii) \Rightarrow (iii)$
$\lambda_{min}(AB) = \min_{x\neq 0} \frac{x^T ABx}{x^T x} = \min_y \frac{ABy,y)_B}{(y,y)_B} = \min_y \frac{y^T BABy}{(y,y)_B} = \min_y \frac{(y,y)_{BAB}}{(y,y)_B}$
$\geq \min_y y_0 \frac{(y,y)_B}{(y,y)_B} = \mu_0$
$\lambda_{max}(AB) = \max_{y\neq 0} \frac{(y,y)_{BAB}}{(y,y)_B} \leq \mu_1$
$(ABy,y)_B = y^T BABy = y^T B^T A^T By = (ABy)^T By = (y, ABy)_B$
$(iii) \Rightarrow (ii)$
$\mu_0 \leq \lambda_{min}(AB) = \min_{y\neq 0} \frac{(y,y)_{BAB}}{(y,y)_B}$
$\Rightarrow \frac{(y,y)_{BAB}}{(y,y)_B} \geq \mu_0, \forall y$
$\Rightarrow (y,y)_{BAB} \geq \mu_0 (y,y) \forall y$
$(iii) \Rightarrow K_2(AB) = \frac{\lambda_{max}(AB)}{\lambda_{min}(AB)} \leq \frac{\mu_1}{\mu_0}$
(Beweis dieses Lemmas ist falsch)

Beispiele:

1: $B = \tau * I$
$(y,y)_B = \tau y^T y$
$(y,y)_{BAB} = \tau^2 y^T Ay$
$\mu_0 \leq \lambda_{min}(AB) = \min_{y\neq 0} \frac{(y,y)_{BAB}}{(y,y)_B} = \min_{y\neq 0} \frac{\tau^1 y^T Ay}{\tau y^T y} = \tau \min_{y\neq 0} \frac{y^T Ay}{y^T y} = \tau \lambda_{min}(A)$
$\lambda_{max}(AB) = \tau \lambda_{max}(A)$
$\Rightarrow K_2(A) = K_2(AB)$

2. Diagonale Vorkonditionierer $B = D^{-1}P = D^{-1}, D = diag(A)$
$x^{k+1} = x^k - D^{-1}(Ax^k - b) \rightarrow$ Jacobi
$\mu_0 y^T D^{-1} y = \mu (y,y)_{D^{-1}} \leq (y,y)_{D^{-1}AD^{-1}} = y^T D^{-1} AD^{-1} y$
$u = D^{-1/2} y, y = D^{1/2} u$
$\mu_0 u^T D^{1/2} D^{-1} D^{1/2} u \leq u^T D^{1/2} D^{-1} AD^{-1} D^{1/2} u$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, D^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1/2} A D^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{11}}} & \cdots & \cdots & \frac{a_{n1}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{nn}}} \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a_{n,n-1}}{\sqrt{a_{n-1,n-1}}\sqrt{a_{nn}}} \\ \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{nn}}} & \cdots & \frac{a_{n-1,n}}{\sqrt{a_{n-1,n-1}}\sqrt{a_{nn}}} & 1 \end{pmatrix}$$

Suchen μ_0 mit:
$\mu_0 \sum u_i^2 \leq \sum_{ij} u_i u_j \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}} \leq \mu_1 \sum u_i^2$
Nach oben: Couchy-Schwarz Ungleichung
$\sum_{ij} \frac{u_i \sqrt{|a_{ij}|}}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{u_j \sqrt{|a_{ij}|}}{\sqrt{a_{jj}}} \leq \sqrt{(\sum_i u_i^2 \sum_j \frac{a_{ij}}{a_{ii}})(\sum_j u_j^2 \sum_i \frac{a_{ij}}{a_{jj}})}$
$\Rightarrow \mu_1 = 2$
A diagonaldominant

$B = D^{-1}$
$\tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k - (AD^{-1}\tilde{x}^k - b)$
Konvergenzfaktoren analog Jacobi
Diagonaldominante Matrizen $\mu_1 \leq 2$
μ_0 abhängig von der Speziellen Matrix A

Diskretisierung: $-x'' = f, x(a) = a(b) = 0$

$$A = 1/h^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$D^{-1/2}\frac{\sqrt{2}}{h}I, D^{-1/2} = \frac{h}{\sqrt{2}}I$

$$D^{-1/2}AD^{-1/2} = \frac{h}{\sqrt{2}}\frac{2}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\frac{h}{\sqrt{2}}$$

$u^T D^{-1/2}AD^{-1/2}u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 1/2\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{i+1} - 1/2\sum_{i=2}^{n} u_{i-1}u_i$

$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{i+1} \underbrace{\leq}_{CS} 2\sum_{i=1}^{n} u_i^2$

$\mu_1 = 2$

nach unten: $\sum_{i=1}^{n-1}(u_i^2 - u_i u_{i+1}) + u_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(u_i - u_{i+1}) + u_n^2$

Bsp: $u = (1, ..., 1)$

$u^T u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = n$

$u^T D^{-1/2}AD^{-1/2}u = 1$

μ_0 muss $\mu_0 u \leq 1$ erfüllen

$\mu_0 \leq \frac{1}{n}$

$\frac{\mu_1}{\mu_0} \geq \frac{2}{\frac{1}{n}} = 2n$

Bessere Vorkonditionierungen:
- unvollständige LR-Zerlegung (ILU)
- unvollständige Cholesky-Zerlegung

$\tilde{L}^T\tilde{L} \approx A$

Aufwandsüberlegungen: wie „unvollständig“ durchführen will.
- Vorkonditionierung von CG-durch iterative Verfahren z.B Richardson oder Jacobi

Richardson: $Ax = b$

$x^1 = x^0 - (Ax^0 - b)$

$x^2 = x^1 - (Ax^1 - b) = (I - A)x^1 + b = (I - A)^2x^0 + (I - A)b + b$

Fixpunktform:

$x = (I - A)^2x + (2I - A)b$

$\underbrace{(I - (I - A)^2)A^{-1}}_{P}Ax = (2I - A)b$

Gestaffelte Iteration über k = pcg-Verfahren

In jedem Iterationsschritt definiere die Anwendung von P auf A durch m Schritte des Richardson-Verfahrens

22.01.2010

5.16 Iterative Lösung symmetrisch indefiniter Probleme

Motivation: verallgemeinerte Inverse für unterbestimmte Systeme.

$Bx = f$, $B \in R^{m\times n}$, $m < n$, $RgB = m$

Verallgemeinerte Inverse Orthogonale zu N(B)

Für m,n gross, direkte Berechnung von B^+ unmöglich Berechnung von N(B) zu aufwendig.

Alternative: Äquivalente Definition „Lösung der minimalen Norm“ $||x|| \to \min_{x,Bx=f}$ ..

$\Leftrightarrow 1/2||x||^2 \to \min_{x,Bx=g}$ ..

Allgemeiner: $1/2||x||_a^2 \to \min_{x,Bx=g}$ .., $A \in R^{n\times n}$ spd

noch allgemeiner: $1/2||x||_A^2 - f^T x \to \min_{x,Bx=g}$ ..
Einbettung in $R^{n\times m}, p \in R^m$
$L(x,p) = 1/2||x||_A^2 - f^T x + (Bx-g)p$
$L : R^{n+m} \to R$ Lagrange-Funktional
p Langrange-Parameter, duale Variable

5.17 Lemma:

$\overline{x} \in R^n$ löst das beschränkte Optimierungsproblem (A), falls $\overline{x}$ ein Minimum von $J : R^n \to R \cup \infty$
$J(x) = \sup_{p\in R^m} L(x,p)$
Beweis: $Bx = g : J(x) = 1/2||x||_A^2 - f^T x$
$Bx \neq g : p_k := k(Bx-g)$
$\sup_p L(x,p) \geq L(x,p_k) = 1/2||x||_A^2 f^T y + \underbrace{k\underbrace{||Bx-g||^2}_{>0}}_{\to\infty \text{ für } k\to\infty}$
$\to \infty$ für $k \to \infty$
$\to \sum_p L(x,p) = \infty$

$$J(x) = \begin{cases} 1/2||x||_A^2 - f^T x & \text{für } Bx = g \\ +\infty & \text{für } Bx \neq g \end{cases}$$

$\overline{x} \in R^n$ minimiert $J \Rightarrow J(\overline{x}) < \infty \Rightarrow B\overline{x} = f$
und $J(\overline{x}) = 1/2||\overline{x}||_A^2 - f^T\overline{x} \leq J(x) = 1/2||x||_A^2 - f^T x$
$\min_x J(x) = \min_x \sup_p L(x,p)$
Falls Lösung $(\overline{x},\overline{p})$ von $\min_x \max_p L(x,p)$ existiert, gilt:
$L(\overline{x},\overline{p}) = \min_x \max_p L(x,p)$
$L(\overline{x},\overline{p}) \leq L(x,\overline{p}) \forall x \in R^n \to \frac{\partial}{\partial x} L(\overline{x},\overline{p}) = 0$
$L(\overline{x},\overline{p}) \geq L(\overline{x},p) \forall p \in R^m \to \frac{\partial}{\partial p} L(\overline{x},\overline{p}) = 0$
$\Rightarrow$ m+n Gleichungen für m+n Unbekannte.
$\frac{\partial L}{\partial x}(x,p)y = \frac{d}{d\epsilon}(L(x+\epsilon y,p)|_{\epsilon=0}$
$= \frac{d}{d\epsilon}(1/2(x+\epsilon y)^T A(x+\epsilon y) - f^T(x+\epsilon y) + (Bx+\epsilon By - g)^T p)$
$= (1/2\ y^T A(x+\epsilon y) + 1/2(x+\epsilon y)Ay - f^T y + (By)^T p)|_{\epsilon=0}$
$= 1/2y^T Ax + 1/2x^T Ay - y^T f + y^T B^T p$
$= y^T(Ax + B^T p - f)$

$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = Ax + B^T p - f$
$0 = \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}((Bx-g)^T p) = \frac{\partial}{\partial p}(P^T(Bx-g)^T)$
$= Bx$

$Ax + B^T p = f$

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \overline{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}$$

5.18 Satz:

Sei $(\overline{x},\overline{p})$ eine Lösung von oben genannten, dann ist $\overline{x}$ eine Lösung des beschränkten Minimierungsproblems.
Beweis: $x \in R^n, Bx = g$
$1/2x^T Ax - f^T x - 1/2\overline{x}^T A\overline{x} - f^T x$
$= 1/2(x-\overline{x})^T A(x-\overline{x}) - 1/2\overline{x}^T\overline{x} + 1/2\overline{x}^T Ax + 1/2x^T A\overline{x} - 1/2\overline{x}^T A\overline{x} - f^T(x-\overline{x})$
$= 1/2||x-\overline{x}||_A^2 - \overline{x}^T A\overline{x} + \overline{x}^T Ax - f^T(x-\overline{x})$
$\geq \overline{x}^T A(x-\overline{x}) - f^T(x-\overline{x}) = (A\overline{x}-f)^T(x-\overline{x})$
$= (B^T\overline{p})^T(x-\overline{x}) = \overline{p}^T B(x-\overline{x}) = \overline{p}^T(g-g) = 0$

$\Rightarrow 1/2x^T Ax - f^T x \geq 1/2\overline{x}A\overline{x} - f^T\overline{x} \forall x, fx = g$

Beispiel:
$A = 1, B = 1$
$n = m = 1$
$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$EW - GGdet \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = 0$
$\lambda^2 - \lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$M = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$ hat n Eigenwerte ≥ 0, m Eigenwerte ≤ 0

Aspd: $Ax + B^T = f \rightarrow x = A^{-1}(f - B^T p)$
$Bx = g \rightarrow Ba^{-1}(f - B^T p) = g$
$BA^{-1}B^T p = BA^{-1}f - g$
Lemma A spd, $Rg(B) = m \Rightarrow S^p = BA^{-1}B^T$ ist spd
S = Schur-Komplement
Beweis: $RgB = m \Rightarrow N(B^T())$
$p \neq 0 \Rightarrow B^T p = x \neq 0$
$p^T BA^{-1}B^T p = x^T A^{-1} x > 0$ wegen A^{-1} spd
$p^T Sp > 0 \forall p \neq 0 \Rightarrow S$ spd
$Sp = h$ wie bisher $\rightarrow$ alle Verfahren anwendbar
Vorkonditionierte Richardson-Iteration:
$Cp^{k+1} = Cp^k - (Sp^k - h), C \in R^{m \times m}$ spd

5.19 Satz:

$C \geq BA^{-1}B$ ($:\Leftrightarrow C - BA^{-1}B = (C - S)$ spd)
Dann konvergiert $p^k \rightarrow \overline{p}$ mit $x^k = A^{-1}(f - B^T p^k) \rightarrow \overline{x}$
Beweis: $G = C^{-1}(C - S)$
λ EW von G mit EW $q : C^{-1}(C - S)q = \lambda q$
$(C - S)q = \lambda Cq$
$q^T Cq - q^T Sq = \lambda q^T Cq$
$\lambda = \frac{q^T(C-S)q}{q^T Cq} > 0$
$q^T Cq(1 - \lambda) = q^T Sq$
$1 - \lambda = \frac{q^T Sq}{q^T Cq} > 0 \Rightarrow \lambda < 1$
$\Rightarrow \rho(G) < 1$

26.01.2010

5.20 Inexaktes Uzawa-Verfahren

$\hat{A}x^k = (\tilde{A} - A)x^k + f - B^T p^k$
$Cp^{k+1} = Cp^k + Bx^{k+1} - g$
A nicht regulär $\Rightarrow$ wähle $\tilde{A}$ regulär
A nicht regulär, wenn ist M regulär
A symmetrisc, positiv semidefinit
Lemma: $x^T Ax > 0 \forall x \neq 0, Bx = 0$
Dann ist M regulär und umgekehrt.
Beweis: Ann.: M ist nicht regulär $\Rightarrow \exists (xp) \neq 0$ mit $M(xp) = 0$
$Ax + B^T p = 0 \rightarrow x^T Ax = -x^T B^T p = -(Bx)^T p = 0$
M nicht regulär $\Rightarrow \exists x \neq 0$ mit $x^T Ax = 0$
$(\Leftrightarrow \forall x \neq 0 : x^T Ax > 0 \Rightarrow M$ regulär)
M regulär, $x \neq 0, Bx = 0, M(xp) \neq 0, \forall (xp) \neq 0$

Insbesondere $M(x0) \neq 0 \Rightarrow \binom{Ax+B^tp}{Bx} \neq 0 \Rightarrow Ax + B^Tp \neq 0$
$\Rightarrow x^TAx + \underbrace{x^TB^T}_{(}Bx)^T = 0p \neq 0 \Rightarrow x^TAx \neq 0 \Rightarrow x^TAx > 0$
Lemma: M regulär $\Leftrightarrow A + B^TC^{-1}B$ spd für ein C spd
Beweis:
$A + B^TC^{-1}B$ spd
$\Rightarrow x^TAx + x^TB^TC^{-1}Bx > 0 \forall x \neq 0$
$\Rightarrow x^TAx > 0 \forall x \neq 0, Bx = 0$
$\Rightarrow M$ regulär
$(A + B^TC^{-1}B)$ nicht spd
$\Rightarrow \exists x \neq 0$: $(A + B^TC^{-1}B)x = 0$
$x = y + z, y \in N(B), z^TAy = y^TAz = 0$
$Ay + Az + B^TC^{-1}Bz = 0$
$\Rightarrow y^TAy + \underbrace{y^TAz}_{=0} + \underbrace{y^TB^T}_{=0}C^{-1}Bz = 0$
$\Rightarrow y^TAy = 0, y \neq 0, By = 0$
$\Rightarrow$ M ist nicht regulär
Erinnerung: $L(x,p) = 1/2x^TAx - f^Tx + p^T(Bx - g)$
Angemerkt Lagrangian:
$L_c(x,p) = L(x,p) + 1/2||Ax - g||^2_{C^{-1}}$
$f_c(x) = \sup_p L_c(x,p) = \begin{cases} 1/2x^TAx - f^Tx & Bx = g \\ \infty & Bx \neq g \end{cases}$
$L_c(x,p) = L(x,p) + 1/2(Bx - g)^TC^{-1}(Bx - g) + p^T(Bx - g)$
$= 1/2(x^TAx + x^TB^TC^{-1}Bx) - f^Tx - g^TC^{-1}Bx + 1/2g^TC^{-1}g + p^T(Bx - g)$
$= x^T(A + B^TC^{-1}B)x$

$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$
multiplizieren $Bx = g$ mit B^TC^{-1} und addieren sie zu $Ax + B^Ty = f$
$\begin{pmatrix} A + B^TC^{-1}B & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + B^TC^{-1}Cg \\ g \end{pmatrix}$
$\tilde{A} = A + B^TC^{-1}B$ spd
Falls Lösung von $\tilde{A}x = b$ mit vernünfitigem numerischen Aufwand durchführbar ist $\rightarrow$ Uzawa-Verfahren anwenden auf $M_c = \begin{pmatrix} \tilde{A} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Konvergenzvedinung analog, $A \rightarrow \tilde{A}$
Lösung nicht mit vernünfitgem Aufwand durchführbar $\rightarrow$ Inexakte Uzawa-Verfahren (A spd)
$\hat{A}x^{k+1} = (\hat{A} - A)x^k - B^Tp^k + f$
$\hat{C}p^{k+1} = \hat{C} + Bx^{k+1} - g$
$\tilde{C}p^{k+1} = \tilde{C}p^k + B\hat{A}^{-1}((\hat{A} - A)x^k - B^Tp^k + f)$
$\begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ p^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} - A & -B^T \\ B\hat{A}^{-1}(\hat{A} - A) & \hat{C} - B\hat{A}^{-1}B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k \\ p^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ B\hat{A}^{-1}f - g \end{pmatrix}$
$G = \begin{pmatrix} \hat{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{C}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} - A & -B^T \\ .. & .. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{-1}(\hat{A} - A) & -\hat{A}^{-1}B^T \\ \hat{C}^{-1}B\hat{A}^{-1}(\hat{A} - A) & \hat{C}^{-1}(\hat{C} - B\hat{A}^{-1}B^T)\hat{C}^{-1}\hat{C} \end{pmatrix}$
$G = \begin{pmatrix} -\hat{A}^{-1} & -\hat{A}^{-1}B^T\hat{C}^{-1} \\ -\hat{C}^{-1}B\hat{A}^{-1} & \hat{C}^{-1}(\hat{C} - B\hat{A}^{-1}B^T)C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{pmatrix}$
$G(xp) = \lambda(xp), (yq) = \begin{pmatrix} A - \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -\hat{A}^{-1} & -\hat{A}^{-1}B^T\hat{C}^{-1} \\ -\hat{C}^{-1}B\hat{A}^{-1} & \hat{C}^{-1}(\hat{C} - B\hat{A}^{-1}B^T)C^{-1} \end{pmatrix} \binom{y}{1} = \lambda \begin{pmatrix} A - \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{pmatrix} \binom{y}{q}$
Verallgemeinertes Symmetrische EWP, falls $A - \hat{A} > 0 \Rightarrow \lambda < 1$
$\hat{C} - B^T\hat{A}^{-1}B > 0 \Rightarrow \lambda < 1 \Rightarrow \rho(G) < 1$
$\Rightarrow$ Konvergenz des exakten Uzawa-Verfahrens
Compressed Sensing/Spensity
Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem $Bx = g, B \in R^{m \times n}, m < n$
Bisher minimiere quadratisches Funktional $1/2||x||^2 : 1/2x^TAx - f^Tx$

In der Praxis oft andere Informationen:
Lösung aus wenigen Komponenten einer Basis $\{b_i\}$
$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ mit möglichstvielen $\alpha_i = 0$
$(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sparse
$\#\{i|x_i \neq 0\} \to \min_{x,Bx=g}$
$S_i \in \{0, 1\}$
$S_i = 0$ wenn $x_i = 0$
$S_i = 1$ wenn $x_i \neq 0$
$\Rightarrow (x_i(1 - S_i) = 0$
Äquivalent: $\sum S_i^2 \to min_{x,s,Bx=g,x_i(1-S_i)=0,S_i\in 0,1}$
Konvexe Relaxierung
$\sum S_i^2 \to min_{x,s,Bx=g,x_i(1-S_i)=0,S_i\in[0,1]}$
x gegeben $\sum S_i^2 \to \min_{x_i(1-S_i)=0} \Leftrightarrow \sum S_i^2 \to \min_{\sum |x_i|(1-S_i)=0}$
$L(x, p) = \sum S_i^2 + p \sum |x_i|(1 - S_i)$
$2S_i - p|x_i| = 0$
$S_i = p/2|x_i|$
$p^2/4 \sum X_i^2 \to \min_{Bx=g}$

29.01.2010

Idee:
$Bx = g, B \in R^{m\times n} m < n$
Suchen Lösung mit $\#\{i|x_i \neq 0\} \to \min$
l^0 - Minimierung:: $\sum |x_i|^0 \to \min, 0^0 := 0$
Approximiert durch $\sum |x_i|^q \to \min_x, q \to 0$
$\sum s_i^2 \to \min, x_i(1 - s_i) = 0$
$\to \sum |x_i|(1 - s_i) = 0$
relaxiert $(s_i = [0, 1])$
$\Rightarrow \sum x_i^2 \to \min_{Bx=f}$ keine gute Relaxierung
Besser:
$\sum s_i^2 \to \min_{\sum_i \sqrt{|x_i|}(1-s_i)=0}$
$L(s, p) = \sum s_i^2 + p \sum \sqrt{|x_i|}(1 - s_i)$
$0 = \frac{\partial L}{\partial s_i} = 2s_i - p\sqrt{|x_i|}, s_i = p/2\sqrt{|x_i|}$
$p/2 \sum |x_i| \to \min_{Bx=g}$
Unter gewissen Bedingungen an B sind l^0- und l^1-Minimierungen äquivalent, (Candres,Tao,Donoho)
$F : R^n \to R$ konvex
$\partial F(x) = w|F(x) + w^T(y - x) \leq F(y) \forall y \in R^n$
[Bei x^2 ist das zum Beispiel die Tangente und liegt immer unterhalb der Funktion]
Es gilt für F stetig differenzierbar um x
$\partial F(x) = F'(x)$
$\partial F(x)$ heisst Subdifferential, $w \in \partial F(x)$ heisst Subgradient
Beispiel:
$F(x) = |x|$
$x \neq 0, \partial F(x) = sgn(x)$
$x = 0 : \partial F(0) = [-1, 1]$
Bedingung: $0 \in \partial F(\overline{x})$ charakterisiert Minimum

5.21 Lemma:

$F : R^n \to R \cup +\infty$ sei konvex.
$\overline{x} \in R^n$ ist ein Minimum von $F \Leftrightarrow 0 \in \partial F(\overline{x})$
Beweis: $0 \in \partial F(\overline{x}) \Leftrightarrow F(\overline{x}) + 0^T(y - x) \leq F(y), y \in R^n$
$\Leftrightarrow F(\overline{x}) \leq F(y) \forall y \in R^n$
$\Leftrightarrow \overline{x}$ ist Minimum von F

$F : R^n \to R \cup +\infty$ ist nützlich bei Nebenbedingungen.
$G(x) \to \min_{x \in C}$, $G : R^n \to R$, konvex und $C \subset R^n$ konvex, abgeschlossen

$$F(x) = \begin{cases} G(x) & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$

$F(x) \to \min_{x \in R^n} \Leftrightarrow G(x) \to \min_{x \in C}$
$||x||_1 \to \min_{Bx=g}$

$$\partial ||x||_1 = \begin{pmatrix} \partial |x_1| \\ ... \\ \partial |x_n| \end{pmatrix}$$

$w \in \partial ||x||_1 \Leftrightarrow w_i \in \partial |x_i| =: sgn(x_i)$
Lösung entspricht Sattelpunkt von $L(x,p) = ||x||_1 + p^T(Bx - g)$
$0 \in \partial_x L = \partial ||x||_1 + B^T p$
$0 = \frac{\partial L}{\partial p} = Bx - g$

$\tau x + \partial ||x||_1 \ni \tau x - B^T p$
$\tau x^{k+1} + \partial ||x^{k+1}||_1 \ni \tau x^k - B^T p^k$
Optimalitätsbedingung für
$\tau/2||x^{k+1} - x^k + 1/\tau B^T p^k||^2 + ||x^{k+1}||_1 \to \min_{x^{k+1}}$
$Cp^{k+1} + Bx^{k+1} - g$
Für den ersten Schritt müssen wir ein Problem der Form $\tau/2||x - f||^2 + ||x||_1 \to \min$
$\tau/2 \sum_i (x_i - f_i)^2 + \sum_i |x_i| = \sum_i \tau/2(x_i - f_i)^2 + |x_i|$
$\sum_i$ ist dann minimal, wenn für jedes i: $\tau/2(x_i - f_i)^2 + |x_i| \to \min_{x_i}$
Optimalitätsbedingung: $0 \in \tau(x_i - f_i) + \partial |x_i|$
1.Fall: $x_i > 0$:
$\partial |x_i| = 1, \tau(x_i - f_i) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_i = f_i - 1/\tau > 0$
2.Fall $x_i < 0$
$\partial |x_i| = -1, \tau(x_i - f_i) - 1 = 0 \Leftrightarrow x_i = f_i + 1/\tau > 0$
3.Fall: $x_i = 0$
$0 \in -\tau f_i + [-1;1] \to f_i \in [-1/\tau; 1/\tau]$

$$x = S_{1/\tau}(f_i) = \begin{cases} f_i - 1/\tau & f_i > 1/\tau \\ 0 & |f_i| \leq 1/\tau \\ f_i + 1/\tau & f < -1/\tau \end{cases}$$

das S heißt „Shrinkage“