

Inhaltsverzeichnis

0.1	Umriss	1
1	Finanzmärkte und deren Derivate	2
1.1	Optionen: Unterscheidung von Kauf- und Verkaufsoptionen	3
1.2	long, short	4
1.3	Pay-off-Diagramme	4
1.4	Profit-Diagramme	5
1.5	Strategien	6
1.6	Arbitrage	7
1.7	Replikationsprinzip	8
1.8	Nullkuponanleihe	9
1.9	Put-Call Parität	9
1.10	Forward	10
1.11	Futures	11
1.12	Digitale Optionen	11
1.13	Eigenschaften des Callpreises	12
1.14	Eigenschaften des Putpreises	13
2	Einperioden Modell	14
2.1	Einperioden-Modell mit risikofreier Anlage	14
2.2	Definition	14
2.3	Beispiel	15
2.4	Satz:	15
2.5	Bemerkung	16
2.6	Bemerkung	16
2.7	Sprechweisen	17
2.8	Claim und Hedge	17
2.9	Satz	17
2.10	Vollständigkeit	18

2.11 Beispiel	19
2.12 Separationssatz von Minkowski	19
2.13 Arbitragefreiheit mittels diskontierten Gewinnmöglichkeiten ausdrücken.	20
2.14 Äquivalente Maße	21
2.15 Definition	22
2.16 No-Arbitrage Theorem	22
2.17 Bemerkung	24
2.18 Preisfestsetzung mit risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß	24
2.19 Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß im CRR-Modell	25
2.20 2.No-Arbitragetheorem	25
2.21 Preisfestsetzung für nicht hedgebare Claims	27
2.22 Upper an lower Hedging	28
2.23 Zusammenhang zum Linear Programming	30
3 Exkurs stochastische Prozesse	31
3.1 Definition	31
3.2 Das N-Perioden CRR-Modell	31
3.3 Random Walk	32
3.4 Bedingter Erwartungswert	33
3.5 Faktorierte bedingte Erwartung	33
3.6 Stochastischer Kern	34
3.7 bedingte Verteilung	34
3.8 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen	34
3.9 Zufallsvariablen mit Lebesgue-Dichten	35
3.10 Eigenschaften der bedingten Erwartungswerte	36
3.11 Bestapproximation	36
3.12 Martingale	37
3.13 Beispiel	38
3.14 Stopzeit	38
3.15 Martingal als faires Glückspiel	39

3.16	Optional Sampling	40
3.17	Beispiel	40
3.18	Vorhersehbare Prozesse	42
3.19	Doob-Meyer-Zerlegung	42
3.20	Beispiele	44
3.21	Prä τ – σ -Algebra	45
3.22	Satz	45
3.23	Satz	46
3.24	Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte	46
3.25	Folgerung	47
3.26	Markov-Prozeß	47
4	Das Mehrperiodenmodell	49
4.1	Diskretes Mehrperioden Finanzmarktmodell	50
4.2	Selbstfinanzierung	51
4.3	Bemerkung	52
4.4	Arbitrage	53
4.5	Satz	53
4.5.1	1.Fassung	53
4.5.2	2.Fassung	54
4.6	Das Core Ross Rubinstein Modell	55
4.7	Claim und Hedge	56
4.8	Satz	56
4.8.1	Einschub: Bewertung von Barriereoptionen	58
4.9	Äquivalentes Martingalmaß	60
4.10	Martingaleigenschaft von selbstfinanzierenden Handelstrategien diskreter stochastischer Analysis	61
4.11	Bewertung mittels P^*	61
4.12	Vollständigkeit	62
4.13	CRR-Modell	62
4.14	Vollständigkeit des CRR-Modells	63

4.15 diskrete Black-Scholes-Formel	65
4.16 Satz	66
4.17 Satz	67
4.18 Satz	68
4.19 No-Arbitrage-Theorem	68
4.20 Charakterisierung der Vollständigkeit	68
4.21 Finanzmarktmodell mit Dividendenzahlung	70
4.22 Satz	71
4.23 Äquivalentes Martingalmaß	71
4.24 Stochastische Integraldarstellung von selbstfinanzierenden Handels- strategien	72
4.25 integrierbare Handelsstrategie	72
4.26 Bewertung von Claims mittels äquivalentem Martingalmaß	73
4.27 Das CRR-Modell mit Dividendenauszahlungen	74
5 Der Wiener Prozeß	75
5.1 Definition	76
5.2 kanonische Darstellung	76
5.3 Lemma	78
5.4 Markov-Eigenschaft	79
5.5 Starke Markov-Eigenschaft	80
5.6 Verteilung des Maximums	81
5.7 Martingale	82
5.8 der geometrische Wiener-Prozeß	83
5.9 Lognormalverteilung	84
5.10 Martingal für den geometrischen Wiener-Prozeß	84
5.11 Momente für den geometrischen Wiener-Prozeß	85

6	Das Black-Scholes-Modell	85
6.1	Modellierung von Aktienpreisen	85
6.2	Definition des Black-Scholes-Modelles	87
6.3	Maßwechsel	87
6.4	Grisanov-Transformation (einfacher Fall)	88
6.4.1	1.Fassung	88
6.4.2	2.Fassung	89
6.5	Äquivalentes Martingalmaß	90
6.6	Bewertung von Claims	91
6.7	Black-Scholes-Formel	91
6.8	Greeks	93
6.9	implizite Volatilität und Smile-Effekt	95
6.10	Black-Scholes-Formel für den Put	95
6.11	Barriere-Option	96

0.1 Umriss

Ziel: Bewertung von Finanzderivaten

Schlagwörter:

- Black-Scholes-Formel
- äquivalentes Martingalmaß
risikokoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß
- Hedging, duplizierende Handelsstrategien
- Arbitrage

Hilfsmittel:

Theorie der stochastischen Prozesse:

- mathematische Modellierung von zeitlich abhängigen Zufallsphänomenen, wie etwa Börsenkurse
- notwendig zur mathematischen Beschreibung von Finanzgütern

Themen:

- diskrete und kontinuierliche Martingaltheorie
- Wienerprozess, Brownsche Bewegung
- geometrischen Brownsche Bewegung als Modell der Aktienkurse
- diskrete und kontinuierliche Markovprozesse
- stochastisches Integral zur Beschreibung des Handels in stetiger Zeit

Literatur:

- A.Irle: Finanzmathematik
- J.C. Hall: Option, Futures Models and other derivations
- S.A.Pliska: Introduction of mathematical Finance
- H.Föllmer, A. Schied: Stochastic Finance

1 Finanzmärkte und deren Derivate

Zweiteilung der Finanzmärkte in:

1. Basisfinanzmärkte
2. derivative Finanzmärkte

Zu 1 gehören z.B.:

- Aktien
- festverzinsliche Wertpapiere
- Bonds
- Rohstoffe
- landwirtschaftliche Erzeugnisse

diese werden gehandelt auf (Kassamärkte):

- Aktienmärkten
- Rentenmärkten
- Warenmärkten

Zu 2 gehören z.B:

- Optionen auf Aktien
- Swaps
- Futures auf Aktien und Fonds

und werden gehandelt auf (Terminbörsen):

- Futuresmärkten
- Optionsmärkten

1.1 Optionen: Unterscheidung von Kauf- und Verkaufsoptionen

Eine Kaufoption beinhaltet das Recht:

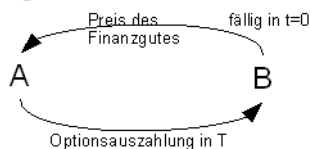
- ein zugrunde liegendes Basisobjekt
- zu einem im voraus bestimmten, fixen Preis, den Ausübungspreis (Strikepreis)
- während (amerikanische Option) oder nur am Ende der Laufzeit (europäische Option) zu kaufen

Bestandteile des Calls:

- Laufzeit eines Calls $[0; T]$
- underlying $(S_T)_{t \in (0, T]}$
- Strike oder Ausübungspreis oder Basis k

Für den Put fasse die Definition wie im Calls bis auf die Änderung des Finanzgutes zu verkaufen anstatt zu kaufen.

Optionen ist ein Vertrag (bedingtes Termingeschäft)



Payoffs eines europäischen Calls zum Zeitpunkt T.

Falls $S_T > K$: übe das Optionsrecht aus, d.h. kaufe Aktie für k . Verkaufe diese sofort für S_T , $S_T - K$ ist die Auszahlung

Bei $S_T \leq K$: lasse Option verfallen.

Insgesamt: $(S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)1_{(S_T > K)}$

Bei Put: $S_T - K$:

- leihe Aktie, verkaufe diese für K mittels des Optionsrechts, kaufe Aktie für S_T und gebe geliehene Aktie wieder zurück, $K - S_T$ der Auszahlung

Insgesamt: Putauszahlung: $(K - S_t)^+$

1.2 long, short

In der Regel geht der Käufer eines Finanzgutes eine long-Position ein, der Verkäufer eine short-Position.

long call $\triangleq$ Käufer einer Kaufoption, Callinhaber

short call $\triangleq$ Verkäufer einer Kaufoption Call-Stillhalter (writer), zeichnet die Option, muss optional die Aktie zum Kurs k in T verkaufen.

long put $\triangleq$ Käufer einer Verkaufsoption

short put $\triangleq$ Put-Stillhalter, writer, Zeichner, muss optional Aktie kaufen

long Aktie $\triangleq$ Käufer einer Aktie

short Aktie $\triangleq$ Verkäufer einer Aktie, Leerverkauf, shortselling

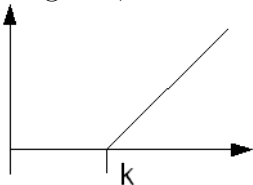
Durch einen sogenannten Leerverkauf kann ein Finanzgut verkauft werden, welches man selber nicht besitzt. Hierzu leiht man sich das Finanzgut von der Bank und verkauft dieses.

1.3 Pay-off-Diagramme

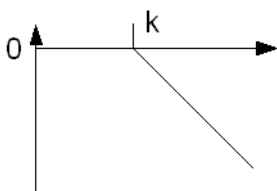
Aufgetragen wird der Wert der Position der Investition gegen den Preis des Basisguts.

- Laufzeit T , Preis S_T des Gutes

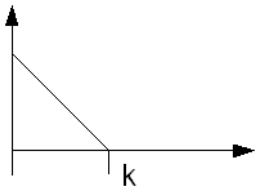
1. long call, Strike k



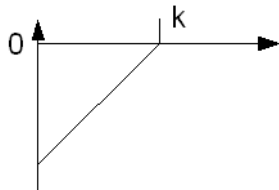
2. short call, Strike k



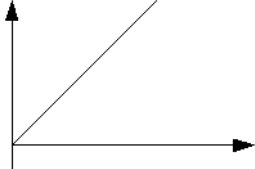
3. long put, Strike k



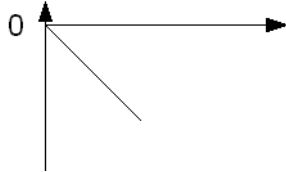
4. short put, Strike k



5. long Aktie, Strike k



6. short Aktie, Strike k

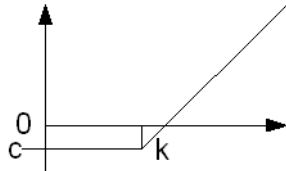


1.4 Profit-Diagramme

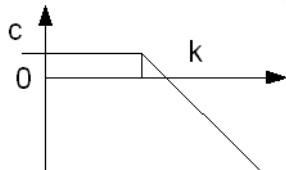
Profit = Payoff - Kosten

Sei C der Callpreis, P der Putpreis

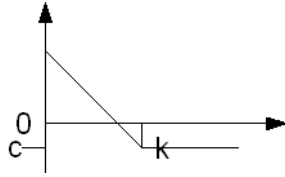
1. long call: Kosten: X , Payoff: $(S_T - K)^+$



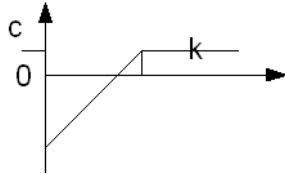
2. short call: Kosten: X , Payoff: $(S_T - K)^+$



3. long put: Kosten: X , Payoff: $(S_T - K)^+$



4. short put: Kosten: X , Payoff: $(S_T - K)^+$



15.10.2009

1.5 Strategien

Durch Kombination von long, short Positionen kann man Strategien bilden.

Beispiel: Absicherung einer Aktie

Aktie heute zum Kurs k gekauft.

Zur Absicherung gegen Kursverlust in T wird eine Putoption zum Strike k gekauft.

Positionen:

long Aktie, long Put

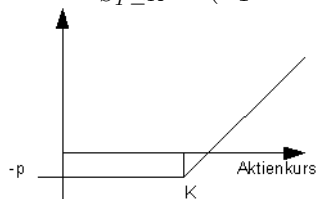
Kosten K , P (heutige Putpreis) : $K + P$

Payoff: $S_T, (K - S_T)^+ : \max\{K, S_T\}$

Profit: Payoff - Kosten

$$= \max\{k, S_T\} - k - P$$

$$= -P \mathbb{1}_{S_T \leq K} + (S_T - K - P) \mathbb{1}_{S_T > K}$$



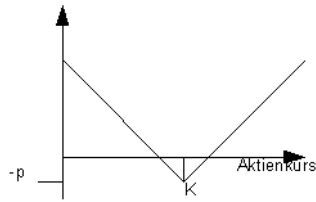
long straddle

Spekulation auf eine Haussee oder Baisee

long call, long Put

Kosten: C , P : $C + P$

Payoff: $(S_T - K)^+, (K - S_T)^+ : |S_T - K|$



Butterfly-Spread

Spekulation auf eine seitwärts gerichtete Börse bei geringem Risiko

Basispreise: $K_1 < K_2 < K_3$

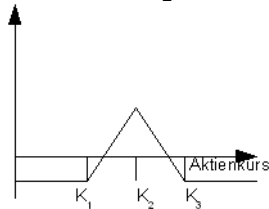
Positionen: long call mit Basis K_1 , long call mit Basis K_3 , 2x short call mit Basis K_2

Kosten: $C_1(S_T - K_1)^+, C_3(S_T - K_3)^+, -2C_2 : -2(S_T - K_2)^+$

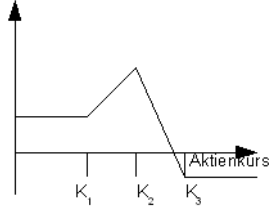
Payoff: $(S_T - K_1)^+ \mathbb{1}_{K_1 < S_T < K_2} + (2K_2 - K_1 - S_T) \mathbb{1}_{K_2 < S_T < K_3} + (2K_2 - (K_1 + K_3))^+ \mathbb{1}_{S_T > K_3}$

Profit: Payoff - Kosten:

Fall: $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3)$



andere Bilder:



1.6 Arbitrage

Ein Arbitrage ist ein risikoloser Profit, der beim Handel mit Finanzinvestitionen erzielt wird. (free lunch)

Beispiel:

	New York	Frankfurt
Aktie	150\$	100€
Wechselkurs	1 € entspricht 1,55\$	

Arbitragemöglichkeit:

- Kaufe Aktie in New York
- Verkaufe diese in Frankfurt

- Wechsle Euro in Dollar

risikoloser Profit:

$$100 * 1,55\$ - 100\$ = 5\$$$

Grundannahme:

Im Handel mit Finanzgütern gibt es keine Arbitrage. Das No-Arbitrage-Prinzip: Das No-Arbitrage-Prinzip ist in einem Gleichgewichtszustand von Finanzmärkten erfüllt und gegeben, wenn Markteffizienz und Markttransparenz vorhanden sind.

1.7 Replikationsprinzip

Voraussetzung: keine Dividendenzahlung bei Finanzgütern.

2 verschiedene Kombinationen K,L von Finanzgütern haben zu einem zukünftigen Zeitpunkt T mit Sicherheit den gleichen Endwert V bzw. W. Dann haben Sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.

Argumentationen:

K habe die Werte V_0 (Anfangswert), V

L habe die Werte W_0, W

1.Fall:

$$V_0 > W_0$$

Am Anfang:

- short selling in K
- gehe long in L

Gewinn: $V_0 - W_0 > 0$

Am Ende

- verkaufen L
- kaufe K mit anschließender Rückgabe an den Verleiher

$$W - V = 0$$

Insgesamt: risikoloser Profit von $V_0 - W_0 > 0$

2. Fall $V_0 < W_0$

Führe analoge Strategie aus mit K und L vertauscht.

V Endauszahlung

1.8 Nullkuponanleihe

Die Nullkuponanleihe ist ein festverzinsliches Wertpapier, das zu einem zukünftigen Zeitpunkt T zu einer Auszahlung eines festen Geldbetrages, etwa 1€, an seinen Inhaber führt. Kuponzahlungen innerhalb der Laufzeit finden nicht statt.

T : Ausübungszeitpunkt, Maturity

In T wird 1 ausgezahlt:

$B(0, T) < 1$ ist der Anfangspreis der Nullkuponanleihe.

$B(t, T)$ zufällige Preis zum Zeitpunkt t für die Nullkuponanleihe.

1.9 Put-Call Parität

Seien C, P die Preise einer Call- bzw. Putoption mit Laufzeit T und strike K . Seien S_0 bzw. S_T der gegenwärtige bzw. zukünftige Preis der Underlying.

Dann gilt: $S_0 + P - C + K * B(0, T)$

Argument:

Betrachte folgende Kombinationen von Finanzgütern:

I: long Underlying, long Put

II: $K * \text{long in eine Nullkuponanleihe mit Maturity } T$, long call

Wert in T :

$$\text{I: } S_T + (K - S_T)^+ = \max\{K, S_T\}$$

$$\text{II: } K + (S_T - K)^+ = \max\{K, S_T\}$$

Replikationsprinzip liefert, daß die Anfangswerte übereinstimmen.

$$S_0 + P = C + K * B(0, T)$$

Bemerkung:

Ist die Zinsentwicklung deterministisch mit stetigem Zinssatz $r > 0$, so ist $B(0, T) = e^{-rT}$, da $B(0, T) * e^{rT} = 1$.

1.10 Forward

Wir betrachten ein zugrundeliegendes Underlying. Ein Forward ist ein OTC(over the counter) Kontrakt zwischen den Parteien A und B.

A zahlt an B den zu einem Abschluß des Vertrages vereinbarten Terminpreis F_T wenn Zeitpunkt T und erhält von B dafür das Underlying.

A hat die long-Position im Forward

B hat die short-Position

T ist der Ausübungspreis (Maturity)

F_T ist der Termpreis (Forward Preis)

Wichtig: Forwardkontrakte verursachen keine Kosten zum Abschlußzeitpunkt.

19.10.2009

Forward, F_T

Bild 1

Beziehung zwischen Termin und Spotpreis

S_0 : gegenwärtige Preis des Underlying, heutiger Spotpreis

F_T : Forwardpreis zum Ausübungszeitpunkt T, Terminpreis in T

Dann gilt:

$$F_T * B(0, T) = S_0.$$

Argument:

Betrachte folgende Kombinationen von Finanzgütern:

I: long in forward, F_T × long in eine Nullkuponanleihe mit Maturity T

II: long im Underlying

Wert zum Zeitpunkt T:

I: $S_T - F_T + F_T = S_T$

II: S_T

Replikationsprinzip liegt:

$$F_T * B(0, T) = S_0$$

1.11 Futures

Standardisierte Forwards, die an Terminbörsen gehandelt werden.

- Hinterlegung eines Sicherheitskontos
- Handel der Future Positionen
- tägliche Wertänderungen verursachen einen Margin-Call auf dem Sicherheitskonto.

Beispiel:

- Dax-futures
- Bobl-future, (Underlying Bundesobligationen)
- Bund-future, (Underlying Bundesanleihe)

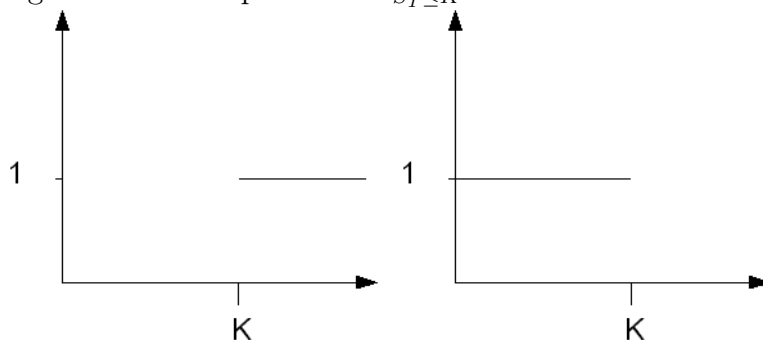
Handelsvolumen ist sehr umfangreich.

1.12 Digitale Optionen

Auszahlung eines festen Geldbetrages (etwas 1 Euro) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses, etwa $\{S_T \geq K\}$ oder $\{S_T \leq K\}$

Digitaler Call auf ein Underlying mit Basis K und Ausübungszeitpunkt T hat die Auszahlung $\mathbb{1}_{S_T \geq K}$.

Digitaler Put entsprechend $\mathbb{1}_{S_T \leq K}$

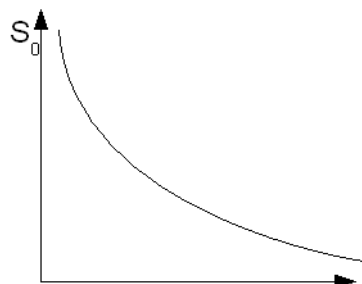


1.13 Eigenschaften des Callpreises

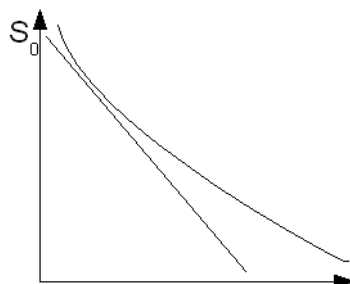
Sei $C(S_0, T, K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying mit Laufzeit T , Strike K , Anfangskurs S_0

Dann gilt:

- i: $C(S_0, T; K) \geq \max\{0, S_0 - K * B(0, T)\}$, innerer Wert eines Calls
- ii: $C(S_0, T; K) \leq S_0$
- iii: $K_1 \leq K_2 \Rightarrow C(S_0, T; K_1) \geq C(S_0, T; K_2)$ monoton fallend in K
- iv: $B(0, T)(K_2 - K_1) \geq C(S_0, T, K_1) - C(S_0, T, K_2)$ für $K_1 < K_2$
- v: $C(S_0, T, K_2) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} C(S_0, T, K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} C(S_0, T, K_3)$ für alle $K_1 < K_2 < K_3$



Basis K



Basis K

Argument:

1. Falls $C < 0$, gehe long in den Call und halte bis zum Ende
risikoloser Gewinn Gewinn $|C|$ am Anfang.
Also $C \geq 0$
Analog gilt $P \geq 0$ für den Put.
Put-Call-Parität liefert:
 $C = S_0 + P - K * B(0, T) \geq S_0 - K * B(0, T)$
2. Falls $C > S_0$
short call, long in der Aktie
am Anfang: Gewinn $C - S_0 > 0$
am Ende: benutze die Aktie, um die Verpflichtung T aus dem Call zu erfüllen.
 $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0$
also Arbitrage möglich

3. Falls $C(K_1) < C(K_2)$, gehe short in K_2 und long in K_1
Am Anfang $C(K_2) - C(K_1) > 0$.
Am Ende $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ \geq 0$
4. Falls $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1)B(0, T) > 0$
 - gehe short in K_1
 - gehe long in K_2
 - long in $K_2 - K_1$ NullkouponanleiheAm Anfang: $C(K_1) - C(K_2) - (K_2 - K_1)B(0, T) > 0$
Am Ende: $(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + (K_2 - K_1) \geq 0$
5. $K_2 - \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_3$ mit $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$
Falls $C(K_2) > \lambda C(K_1) + (1 - \lambda)C(K_3)$
gehe short in K_2 ; λx long in K_1 , $(1 - \lambda)$ long in K_3
Am Anfang:
Gewinn $C(K_2) - \lambda C(K_1) - (1 - \lambda)C(K_3) > 0$
Am Ende:
 $\lambda(S_T - K_1)^+ + (1 - \lambda)(S_T - K_3)^+ \geq (S_T - K_2)^+$
also eine Arbitragemöglichkeit

Analog kann man für den Put argumentieren (oder mit Put-Call-Parität):

1.14 Eigenschaften des Putpreises

Sei $P(S_0, T; K)$ der Preis eines Puts mit Laufzeit T , Basis K , Anfangskurs S_0 . Dann gilt:

- (i) $P(S_0, T, K) \geq \max\{0, K * B(0, T) - S\}$
- (ii) $P(S_0, T, K) \leq K$
- (iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow P(K_1) \leq P(K_2)$ monoton wachsend in K
- (iv) $B(0, T)(K_2 - K_1) \geq P(K_2) - P(K_1)$ für alle $K_2 > K_1$
- (v) $P(K_2) \leq \lambda P(K_1) + (1 - \lambda)P(K_3)$ für alle $K_1 < K_2 < K_3$ mit $\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$
konvex in K .

2 Einperioden Modell

bisher: kein mathematisches Modell zur Beschreibung von Finanzmärkten

Preisfestsetzung mit Hilfe des Replikationsprinzips, also durch Finden von duplizierenden Handelsstrategien.

Im folgenden Argumentation innerhalb eines mathematischen Modells.

2.1 Einperioden-Modell mit risikofreier Anlage

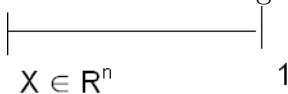
Finanzgüter mit festen Anfangspreisen $S_1(0), \dots, S_N(0)$ und zufällige Endpreise $S_1(1), \dots, S_N(1)$ nach einer Handelsperiode.

In Vektornotation:

$$\begin{pmatrix} S_1(0) \\ \dots \\ S_N(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, S(1) = \begin{pmatrix} S_1(1) \\ \dots \\ S_N(1) \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$S(1)$ ist eine Zufallsvektor auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Θ, P)

Ein Handel in diesem Finanzmarktmodell erfolgt durch Aufstellen des Portfolios $x \in \mathbb{R}^N$ am Anfang und Halten bis zum Ende.



x_i = Anzahl an Anteilen im i -ten Finanzgut.

beliebige Teilbarkeit wird angenommen.

Anfangswert: N

$$\langle x, S(0) \rangle = \sum_{i=1}^N x_i S_i(0) \in \mathbb{R}$$

und einem zufälligen Endwert.

$$\langle x, S(1) \rangle = \sum_{i=1}^N x_i S_i(1)$$

Ein Portfolio x_f heißt risikofreie Anlage, falls $\langle x_f, S(0) \rangle > 0$ und $\langle x_f, S(1) \rangle = 1$.

$B = \langle x_f, S(0) \rangle$ heißt Diskontfaktor.

Eine risikofreie Anlage repliziert also eine Nullkuponanleihe, deren Maturity das Periodenende ist.

2.2 Definition

Ein Portfolio x wird als Arbitrage bezeichnet, falls gilt: $\langle x, S(0) \rangle \leq 0$, $\langle x, S(1) \rangle \geq 0$ und $P(\langle x, S(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle > 0) > 0$

Durch eine Arbitragemöglichkeit kann ohne Anfangskapital ein Portfolio aufgebaut werden, das einen risikolosen Gewinn $\langle x, S(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle \geq 0$ erzielt.

2.3 Beispiel

Cox-Ross-Rubinstein Modell (CRR-Modell)

$N = 2$ Finanzgüter

- Geldmarktkonto, Bankkontofestverzinsliche Anleihe

$$S_1(0) = 1, S_1(1) = 1 + S$$

S ist der Zinssatz mit dem sich im eingesetzten Kapital risikolos verzinst. = risikofreie Anleihe

- risikobehaftetes Basisgut (risky asset) mit Anfangspreis $S_2(0) = A(0) > 0$

$$S_2(1) = A(1) = \begin{cases} u * A(0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } P \\ d * A(0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - P \end{cases} \quad \text{mit Konstanten aus } d > 0.$$

Ein kanonisches Modell für $A(1)$ ist $\Omega_{\omega_1, \omega_2} : A(1)(\omega_1) = uA(0), A(1)(\omega_2) = dA(0)$

P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ definiert durch $P(\omega_1) = p = 1 - P(\omega_2), 0 < p < 1$

$$\text{Kurz: } S(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ A(0) \end{pmatrix}, S(1) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 + \rho \\ A(1) \end{pmatrix}$$

Das Portfolio $x_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\rho} \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine risikofreie Anlage, da $\langle x_f, S(1) \rangle = \frac{1}{1+\rho} * (1 + \rho) + 0 = 1$

$\frac{1}{1+\rho} = \langle x_f, S(0) \rangle$ ist aber Diskontfaktor im CRR-Modell

Die Parameter des CRR-Modells sind S, d, u, p

2.4 Satz:

Das CRR-Modell ist arbitrage-frei genau dann, wenn $d < 1 + \rho < u$

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ Kontraposition:

1. Fall: $1 + \rho < d$ (Aktie ist immer besser als die Anleihe)

Dann ist $x = \begin{pmatrix} -A(0) \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Arbitrage, (leihe Geld und investiere in die Aktie),
denn $\langle x, S(0) \rangle = -A_0 * 1 + 1 * A_0 = 0$ und $\langle x, S(1) \rangle = -A(1 + \rho) + A(1) \geq 0$
und > 0 im Falle von $A(1) = uA(0)$

2.Fall: $1 + \rho \geq u$ (Anleihe ist besser als die Aktie)

Dann ist $x = \begin{pmatrix} A(0) \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Arbitrage, wir verkaufen die Aktie und kaufen dafür Anleihen $\langle x, S(0) \rangle = 0$ und $\langle x, S(1) \rangle \geq 0$ und > 0 für $A(1) = dA(0)$.

„ $\Leftarrow$ “ Kontraposition:

Sei x eine Arbitrage, es gilt also $x_1 + x_2 A(0) \leq 0$, $x_1(1 + \rho) + x_2 u A(0) \geq 0$, $x_1(1 + \rho) + x_2 d A(0) \geq 0$

und eine der Ungleichungen ist strikt.

1.Fall: $x_1 < 0$, d.h. Anleihe verkauft und Aktie gekauft

also $x_2 A(0) \leq x_1$, $-x_1(1 + \rho) \leq x_2 A(0)$

$\Rightarrow -x_1(1 + \rho) \leq -x_1 d \Rightarrow 1 + \rho \leq d$

2.Fall: $x_1 > 0$

d.h. Anleihe gekauft und Aktie verkauft, dann $-x_2 A(0) \geq x_1$, $x_1(1 + \rho) \geq x_2 u A(0)$

also $x_1(1 + \rho) \geq -x_2 A(0) u \geq x_1 u$

$\Rightarrow 1 + \rho \geq u$

3.Fall: $x_1 = 0$

dann muss $x_2 \leq 0$ und $x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Dann ist aber x kein Arbitrage. Also kann der dritte Fall nicht auftreten.

2.5 Bemerkung

In einem arbitragefreien Modell mit risikofreier Anlage ist der Diskontierungsfaktor eindeutig bestimmt.

Beweis:

folgt unmittelbar aus dem Replikationsprinzip, da der Diskontfaktor der Anfangswert einer risikofreien Anlage ist.

2.6 Bemerkung

Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Arbitrage, so gibt es ein Arbitrage y mit $\langle y, S(0) \rangle = 0$

Beweis:

Sei $V(0) = \langle x, S(0) \rangle < 0$ und x_f eine risikofreie Anlage mit Diskontfaktor $B = \langle x_f, S(0) \rangle > 0$

Lege $|V(0)|$ in die risikofreie Anlage an, d.h. kaufe $\frac{|V(0)|}{B}$ Anteile der risikofreien

Anlage.

Setze also $y = x + \frac{|V(0)|}{B}x_f$

Dann gilt: $\langle y, S(0) \rangle = \langle x, S(0) \rangle + |V(0)| = V(0) + |V(0)| = 0$

$\langle y, S(1) \rangle = \underbrace{\langle x, S(1) \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{|V(0)|}_{> 0} > 0$

2.7 Sprechweisen

Für Zufallsgrößen X, Y sagen wir $X = Y$, für $P(X = Y) = 1$

$X \geq Y$ für $P(X \geq Y) = 1$

$X > Y$ für $P(X \geq Y) = 1$ und $P(X > Y) > 0$

2.8 Claim und Hedge

Gegeben: Einperioden Modell mit risikofreier Anlage.

Ein Claim ist ein Kontrakt, der seinem Inhaber am Ende der Periode eine zufällige Auszahlung C zusichert. (C kann auch negative Werte haben)

Jeder Claim entspricht also einer Zufallsgröße $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Claims entsprechen derivativen Finanzprodukten.

Ein Claim C heißt absicherbar oder hedgebar, wenn es ein Portfolio $x \in \mathbb{R}^N$ gibt mit $\langle x, S(1) \rangle = C$ gibt. x heißt dann Hedge oder publizierendes Portfolio für C .

Das Replikationsprinzip kann nun übertragen werden auf das Einperioden Modell, um einen eindeutigen Preis für hedgebare Claims zu ermitteln.

Die beiden folgenden Strategien:

I: Kaufen von C und halten bis zum Ende

II: Aufbauen des Hedgeportfolios x und halten bis zum Ende.

haben den gleichen Endwert.

Das Replikationsprinzip liefert, daß beiden Strategien auch den gleichen Anfangswert haben. Der Arbitragefreien Anfangspreis von C ist also durch den Anfangswert $\langle x, S(0) \rangle$ des Hedgeportfolios bestimmt.

2.9 Satz

In einem Arbitragefreien Einperioden Modell mit risikofreier Anlage sei C ein hedgebare Claim mit Hedge $x \in \mathbb{R}^N$.

$\tilde{S}(0) = \begin{pmatrix} a \\ S(0) \end{pmatrix}, \tilde{S}(1) = \begin{pmatrix} C \\ S(1) \end{pmatrix}$ äquivalent

(i) das erweiterte Modell ist arbitragefrei

(ii) $\langle x, S(0) \rangle$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) per Kontraposition

1.Fall: $a > \langle x, S(0) \rangle$

Dann ergibt sich eine Arbitragemöglichkeit für den Verkäufer des Claims.

Gehe short in den Claim und kaufe den Hedge, d.h. bilde

$$\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}, \text{ dann } \langle \tilde{x}, \tilde{S}(0) \rangle = -a + \langle x, S(0) \rangle < 0.$$

$$\langle \tilde{x}, \tilde{S}(1) \rangle = -C + \langle x, S(1) \rangle = 0$$

Also ist $\tilde{x}$ ein Arbitrage.

2.Fall: $a < \langle x, S(0) \rangle$

Dann hat der Käufer des Claims eine Arbitragemöglichkeit.

Gehe short im Hedge und long im Claim, d.h. bilde

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}. \text{ Dann gilt:}$$

$$\langle \tilde{x}, \tilde{S}(0) \rangle = a - \langle x, S(0) \rangle < 0$$

$$\langle \tilde{x}, \tilde{S}(1) \rangle = C - \langle x, S(1) \rangle = 0$$

Dann ist $\tilde{x}$ ein Arbitrage.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $a = \langle x, S(0) \rangle$

Annahme: $\tilde{z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in R^{N+1}$ ist Arbitrage im erweiterten Modell.

Wegen $a = \langle x, S(0) \rangle$ gilt:

$$\langle \tilde{z}, \tilde{S}(0) \rangle = z_0 a + \langle z, S(0) \rangle = z_0 \langle x, S(0) \rangle + \langle z, S(0) \rangle = \langle z_0 x + z, S(0) \rangle$$

$$\langle \tilde{z}, \tilde{S}(1) \rangle = z_0 C + \langle z, S(1) \rangle = z_0 \langle x, S(1) \rangle + \langle z, S(1) \rangle = \langle z_0 x + z, S(1) \rangle$$

$\Rightarrow z_0 x + z$ Arbitrage im Ausgangsmodell

$\Rightarrow$ Widerspruch

26.10.2009

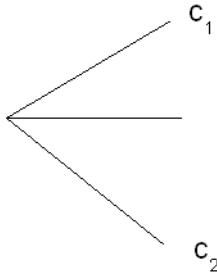
2.10 Vollständigkeit

Ein Einperioden Modell heißt vollständig, falls jeder Claim hedgebar ist.

2.11 Beispiel

Das CRR-Modell ist vollständig

Beweis: Sei $C = (C(\omega_1), C(\omega_2)) = (c_1, c_2) = (c_u, c_d)$



Portfolio x_1, x_2 bestimmt sich aus:

$$x_1(1 + \rho) + x_2 u A(0) = c_1$$

$$x_1(1 + \rho) + x_2 d A(0) = c_2$$

$$x_1 = \frac{1}{1+\rho} \frac{uc_2 - dc_1}{u-d}$$

$$x_2 = \frac{c_1 - c_2}{(u-d)A(0)}$$

Im Falle des europäischen Calls $C(A(1) - K)^+$ erhält man $x_1 \leq 0 \leq x_2$

Als eindeutig bestimmter Preis eines Claims C erhält man also

$$a = p(C) = x_1 + x_2 A(0) = \frac{1}{1+\rho} \frac{uc_2 - dc_1}{u-d} + \frac{c_1 - c_2}{u-d}$$

Frage: Erhält man diesen Preis auch als mittlere abdiskontierte Claimauszahlung?

Für $p^* = P^*(A_1 = uA_0) = P^*(\omega_1)$

$$E^* \frac{1}{1+\rho} C = p^* \frac{1}{1+\rho} c_1 + (1 - p^*) \frac{1}{1+\rho} c_2 = a$$

$$\Leftrightarrow p^* \left(\frac{1}{1+\rho} (c_1 - c_2) \right) = \frac{1}{1+\rho} (c_1 - c_2) \frac{1+\rho-d}{u-d}$$

$$\Leftrightarrow p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$$

Also gilt für $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$.

Der arbitragefreie Anfangspreis $p(C)$ eines jeden Claims C erfüllt $p(C) = E^* \frac{1}{1+\rho} C$

Ziel: Charakterisierung der Arbitragefreiheit mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie.

2.12 Separationssatz von Minkowski

Seien C_1 und C_2 nichtleere konvexe Mengen des $\mathbb{R}^n$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Sei C_1 abgeschlossen und C_2 kompakt.

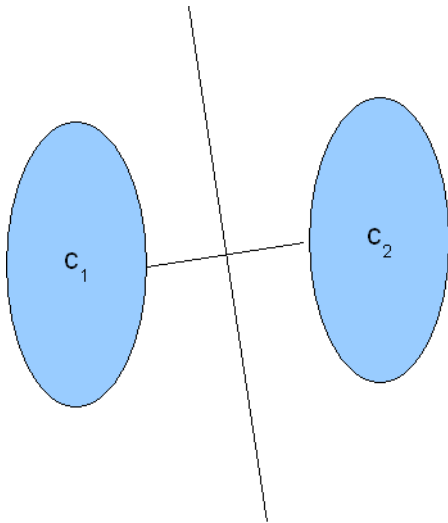
Dann gibt es eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

und reelle Zahlen $\beta_1 < \beta_2$ mit $\phi(x) \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \phi(y)$, für alle $x \in C_1, y \in C_2$

Insbesondere:

$$\sup_{x \in C_1} \phi(x) < \inf_{y \in C_2} \phi(y)$$

Graphische Veranschaulichung:



Um dies zu benutzen muß eine äquivalente Formulierung der Arbitragefreiheit gefunden werden.

2.13 Arbitragefreiheit mittels diskontierten Gewinnmöglichkeiten ausdrücken.

Gegeben ist ein Einperioden-Modell mit Anfangspreis $S(0) \in \mathbb{R}^n$ und Endpreis $S(1) \in \mathbb{R}^n$ zufällig.

risikofreie Anlage x_f mit Wert $\langle x_f, S(1) \rangle = 1$ und $\langle x_f, S(0) \rangle = B = \frac{1}{1+r}$

Das j -te Finanzgut ermöglicht einen diskontierten Gewinn von $Y_j = \frac{1}{1+r}S_j(1) - S_j(0), j = 1, \dots, N$

Erhalte so einen zufälligen diskontierten Gewinnvektor: $Y = \frac{1}{1+r}S_j(1) - S_j(0)$

Ein Portfolio $x \in \mathbb{R}^n$ liefert also einen diskontierten Gewinn von $\langle x, Y \rangle = \langle x, S(1) \rangle \frac{1}{1+r} - \langle x, S(0) \rangle$

$G = \{\langle x, Y \rangle_x \in \mathbb{R}^N\}$ ist die Menge aller diskontierten Gewinnmöglichkeiten, die beim Handel im Finanzmarkt möglich sind. G ist ein endlich-dimensionaler Teilraum der Menge aller reellwertigen Zufallsvariablen. Bezeichne mit: $L_+ = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f(\omega) \geq 0, \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$ die Menge aller nicht-negativen Zufallsvariablen.

Dann sind äquivalent:

- Das Modell ist arbitragefrei
- $G \cap L_+ = \{0\}$

Beweis:

(ii) $\Rightarrow$ (i) per Kontraposition

Ist das Modell nicht arbitragefrei, so wie ein Portfolio $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\langle x, S(0) \rangle = 0$ und $\langle x, S(1) \rangle > 0$ also auch $\frac{1}{1+r} \langle x, S(1) \rangle > 0$ und somit $\langle x, Y \rangle = \frac{1}{1+r} \langle x, S(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle \Rightarrow 0$

also gilt nicht (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) per Kontraposition

Sei $G \cap L_+ \neq \{\emptyset\}$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < \frac{1}{1+r} \langle x, S(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle$.

Lege $\langle x, S(0) \rangle$ in die risikofreie Anlage. Bilde also:

$z = x - \langle x, S(0) \rangle (1+r)x_f$. Dann gilt:

$\langle z, S(0) \rangle = 0$ und

$$\frac{1}{1+r} \langle z, S(1) \rangle = \frac{1}{1+r} (\langle x, S(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle (1+r)x_f, S(1)) = \frac{1}{1+r} \langle x, S(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle = \langle z, Y \rangle > 0$$

Also ist z ein Arbitrage.

2.14 Äquivalente Maße

Sei (Ω, A, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum

$N_P = \{N \in A : P(N) = 0\}$ ist das System der Nullmengen. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß heißt absolut-stetig bzgl. P

$Q \ll P \Leftrightarrow N_P \subset N_Q$

Q heißt äquivalent zu P

$Q \sim P \Leftrightarrow N_P = N_Q$.

Ist $L \geq 0$ mit $\int L dP = 1$, so wird durch $Q(A) = \int_A L dP$, für alle $A \in \mathcal{O}L$ ein

Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert durch $Q \ll P$. L ist die P -Dichte von Q .

Schreibweise: $\frac{dQ}{dP} = L$

Es gilt:

Sind L, L' P -Dichten von Q , so ist $P(L = L') = 1$

Ist Q äquivalent zu P , so ist $P(L > 0) = 1 = Q(L < \infty)$ und $\frac{1}{L}$ ist die Q -Dichte von P

i.e: $P(A) = \int_A \frac{1}{L} dQ$

Spezialfall:

$|\Omega| < \infty, \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$

$\text{supp}P = \{\omega : P(\{\omega\}) > 0\}$

Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω ist äquivalent zu P

$\Leftrightarrow \text{supp}P = \text{supp}Q$

Zusammenhang zur Modellierung von Finanzmärkten

- Ein Finanzmarktmodell wird im wesentlichen bestimmt durch die zufällige Entwicklung der Basisfinanzgüter

- Dabei ist nicht entscheidend, welche Verteilung ein Akteur im Finanzmarkt postuliert.
- Zwei Akteure sind im gleichen Finanzmarkt, wenn die beiden konstruierten Verteilungen in die gleichen Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit Basisfinanzgüter eintreten lassen können. Das ist der Fall, wenn beiden Verteilungen äquivalent sind.
- Ein Übergang zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß ändert den Finanzmarkt nicht, wohl aber die Verteilung der Basisfinanzgüter.
- Ein endliches Finanzmarktmodell d.h. $|\Omega| < \infty$ wird nicht verändert, wenn die Menge der Elementarereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit unverändert bleibt.

2.15 Definition

In einem Einperioden-Modell heißt P^* risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn gilt:

1. $P^* \sim P$
2. Es existiert ein $B > 0$ mit $S(0) = E^*BS(1)$
 $E^*B(S(1) - S(0)) = 0$

P^* wird auch äquivalentes Martingalmaß genannt.

29.10.2009

$$P^* \sim P$$

$$E^*BS(1) = S(0)$$

$$E^*(BS_i(1) - S_i(0)) = 0, \text{ für alle } 1 \leq i \leq N$$

2.16 No-Arbitrage Theorem

In einem Einperioden-Modell mit risikofreier Anlage sind äquivalent:

1. Das Modell ist arbitragefrei
2. Es existiert ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß P^*

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir führen den Beweis für ein endliches Ω . Sei also $|\Omega| = d$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ und $P(\{\omega_i\}) > 0$ für alle $i = 1, \dots, d$.

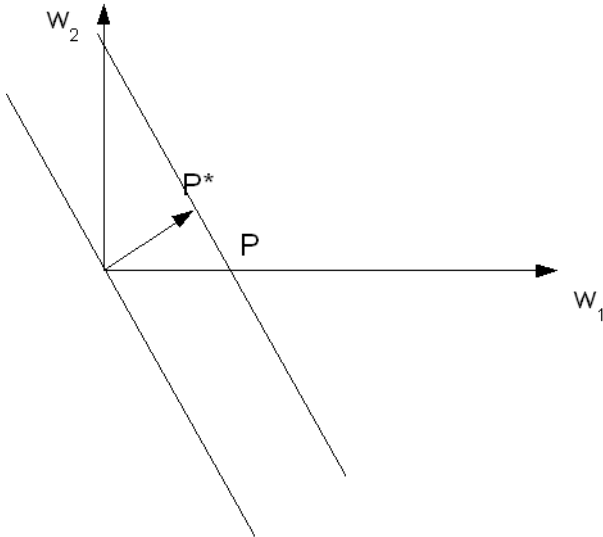
Die Menge der diskontierten Gewinnmöglichkeiten $G = \{\langle x, Y \rangle : x \in R^n\}$, $Y = \frac{1}{1+r}S(1) - S(0)$, r : Zinssatz der risikofreien Anlage die beim Handel im Finanzmarkt möglich sind, ist ein abgeschlossener Teilraum von $L_0 = \mathbb{R}^\Omega \simeq \mathbb{R}^d$.

Aus der Arbitragefreiheit folgt $L_+ \cap G = \{0\}$.

Betrachte weiter die konvexe, kompakte Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$P = \{Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, 0 \leq Q(\omega_i) \leq 1, \text{ für alle } 1 \leq i \leq d, \sum_{i=1}^d Q(\omega_i) = 1\}$$

Es gilt: $P \subset L_+ \cap G$



Der Separationssatz von Minkowski liefert eine lineare Funktion ϕ und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\phi(V) \leq \beta$ für alle $V \in G$ und $\phi(Q) > \beta$ für alle $Q \in P$.

Da G ein Teilraum ist, gilt $\phi(V) = 0$ für alle $V \in G$.

Da P kompakt ist, kann $\beta > 0$ angenommen werden.

Es existiert also ein $\pi \in (\text{Kern } \phi)^\perp$ mit $\phi(V) = \langle \pi, V \rangle = 0$ für alle $V \in G$ und $0 < \phi(Q) = \langle \pi, Q \rangle$ für alle $Q \in P$.

Für $Q = \delta_{\omega_i}$, $i = 1, \dots, d$, gilt: $\pi_i = \langle \pi, \delta_{\omega_i} \rangle > 0$. Erhalte durch Normalisieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^* durch $P^*(\omega_i) = \frac{\pi_i}{\sum_{i=1}^d \pi_i}$ für alle $1 \leq i \leq d$ mit $P^* \sim P$ und

$$0 = \langle P^*, V \rangle = \sum_{i=1}^d V(\omega_i) P^*(\omega_i) = E^* V, \text{ für alle } V \in G.$$

Also $E^*(\frac{1}{1+r}S_i(1) - S_i(0)) = 0$ für alle $1 \leq i \leq N$ was $E^* \frac{1}{1+r}S(1) = S(0)$ impliziert.

Also ist P^* risikoneutral.

„ $\Leftarrow$ “ Sei P^* risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann existiert ein $\bar{B} > 0$ mit

$$E^* \overline{BS}(1) - S(0).$$

$$\text{Also } E^* BS(1) - S(0) = 0$$

Annahme: Modell ist nicht arbitragefrei. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, S(0) \rangle = 0$ und $\langle x, S(1) \rangle > 0$. Also gilt:

$$0 < E^*(\langle x, \overline{BS}(1) \rangle - \langle x, S(0) \rangle) = \left\langle x, \underbrace{E^* BS(1) - S(0)}_{=0} \right\rangle = 0 \text{ Widerspruch}$$

2.17 Bemerkung

1. Risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.
2. Sind in einem Modell mit risikofreier Anlage P_1^*, P_2^* risikoneutral mit $S(0) = E_1^* B_1 S(1) = E_2^* B_2 S(1)$, $\Rightarrow B_1 = B_2$

Beweis für (ii):

Sei x_f risikofreie Anlage $B = \langle x_f, S(0) \rangle > 0$ und $\langle x_f, S(1) \rangle = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } B_1 &= E_1^* B_1 \underbrace{\langle x_f, S(1) \rangle}_{=1} = E_1^* \langle x_f, B_1 S(1) \rangle = \langle x_f, E_1^* B_1 S(1) \rangle = \langle x_f, S(0) \rangle = \\ &\langle x_f, E_2^* B_2 S(1) \rangle = E_2^* B_2 \langle x_f, S(1) \rangle = B_2 \end{aligned}$$

2.18 Preisfestsetzung mit risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß

Gegeben: Sei ein Einperioden-Modell mit Diskontfaktor $B > 0$, P^* sei ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß und C ein hedgebare Claim mit Hedge $x \in \mathbb{R}^n$. Dann sind für das um den Handel mit C erweiterte Modell:

$$\tilde{S}(0) = \begin{pmatrix} a \\ S(0) \end{pmatrix}, \tilde{S}(1) = \begin{pmatrix} C \\ S(1) \end{pmatrix} \text{ äquivalent:}$$

(i) Das erweiterte Modell ist arbitragefrei

(ii) $a = E^* BC$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$a = \langle x, S(0) \rangle = \langle x, E^* BS(1) \rangle = E^* B \underbrace{\langle x, S(1) \rangle}_{=C} = E^* BC$$

(i) $a = E^* BC$ und $S(0) = E^* BS(1)$

$\Rightarrow E^*B\tilde{S}(1) = \tilde{S}(0) \Rightarrow P^*$ ist risikoneutral im erweiterten Modell $\Rightarrow$ Arbitragefreiheit des erweiterten Modells nach dem No-Arbitragetheorem.

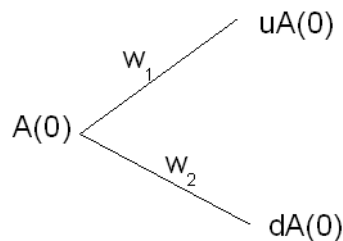
Bedeutung:

Preisfestsetzung ist eben auch ohne Berechnung des Hedge möglich durch die mittlere abdiskontierte Clainauszahlung bzgl. eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes.

2.19 Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß im CRR-Modell

$$S(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ A(0) \end{pmatrix}, S(1) = \begin{pmatrix} 1+\rho \\ A(1) \end{pmatrix}, A(1) = \begin{cases} uA(0) & \text{mit Wahrscheinlichkeitsmaß } p \\ dA(0) & \text{mit Wahrscheinlichkeitsmaß } 1-p \end{cases}$$

$$\Omega\{\omega_1, \omega_2\}, A(1)(\{\omega_1\}) = uA(0), A(1)(\{\omega_2\}) = dA(0)$$



P^* ist äquivalent zu $P \Leftrightarrow 0 \leq P^*(\{\omega_1\}) < 1$

$$P^* := P^*(\{\omega_1\}), B = \frac{1}{1+\rho}$$

$$E^*BS(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ E^*\frac{A(1)}{1+\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ A(0) \end{pmatrix}$$

$$A(0) = E^*\frac{A(1)}{1+\rho} = (uA(0)p^* + dA(0)(1-p^*))\frac{1}{1+\rho}$$

$$\Leftrightarrow p^* = \frac{1+\rho+d}{u-d}$$

beachte:

$$a) \quad 1 > p^* > 0 \Leftrightarrow d < 1 + \rho < u$$

b) P^* ist eindeutig bestimmt

Das CRR-Modell ist vollständig. Der arbitragefreie Anfangspreis a eines jeden Claims $C = (C(\omega_1), C(\omega_2))$ erfüllt $a = E^*BC = \frac{1}{1+\rho}(C(\omega_1)p^* + C(\omega_2)(1-p^*))$

2.20 2.No-Arbitragetheorem

Charakterisierung der Vollständigkeit.

Gegeben: Sei ein arbitragefreies Einperioden-Modell mit risikofreier Anlage über einem endlichen Ω . Dann sind äquivalent:

- (i) Das Modell ist vollständig.
- (ii) das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei P_1^*, P_2^* risikoneutral, d.h. $P_1^* \sim P \sum P_2^*$, $E_1^* BS(1) = S(0) = E_2^* BS(1)$
Für $A \in \mathcal{A}$ ist 1_A ein Claim, der wegen der Vollständigkeit hedgebar ist mit Hedge x , also gilt: $\langle x, S(0) \rangle = E_1^* B1_A = BP_1^*(A)$

$$E_2^* B1_A = BP_2^*(A) \Rightarrow P_1^* = P_2^*$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Kontraposition:

o.E.d.A. $P(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, $\langle x, S(1) \rangle : x \in R^n = \text{span}(s(1)) = \mathcal{H}$ ist der Raum der hedgebaren Claims.

Orthogonalzerlegung liefert $L_0 = \mathcal{H}(+) \mathcal{H}^\perp$

$$\mathcal{H}^\perp = \{U \in L_0 : EUH = 0 \text{ für alle } H \in \mathcal{H}\}$$

Modell ist nicht vollständig $\Rightarrow \mathcal{H}^\perp \neq 0$

$\Rightarrow$ Es existiert ein $U \in \mathcal{H}^\perp$ mit $U \neq 0$

Da 1 hedgebar ist ($1(\omega) = 1$)

$$\text{gilt: } 0 = EU1 = EU$$

Sei P^* ein äquivalentes Martingalmaß mit P-Dichte L .

Wegen der Endlichkeit von Ω existiert ein $\epsilon > 0$ mit $L'(\omega) = L(\omega) + \epsilon U(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

$$E_P L' = EL + \underbrace{\epsilon EU}_{=0} = EL = 1$$

Also definiert L' die Dichte eines zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $P' \neq P^*$ und weiter $E' BS(1) = ELBS(1) + \epsilon EBUS(1)$

$$= E^* BS(1) = S(0)$$

Also $P' \neq P^*$ und P' risikoneutral.

02.11.2009

Bemerkung:

- (i) Das CRR-Modell ist vollständig
- (ii) Das Dimensionsargument:

Gegeben: Einperioden-Modell mit $|\Omega| = M$, N Finanzgüter

Der Endpreis des i -ten Finanzgutes kann dann als Vektor im $\mathbb{R}^M$ aufgefaßt werden.

$$(S_i(1)(\omega_1), \dots, S_i(1)(\omega_M)) \in \mathbb{R}^M$$

Der von diesen Vektoren $S_1(1), \dots, S_n(1)$ erzeugte Teilraum des $\mathbb{R}^M$ bildet die Menge der hedgebaren Claims.

Definiert man die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ durch $a_{ij} = S_j(1)(\omega_i)$ für alle $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$

so ist $\mathcal{H} = \{Ax : x \in \mathbb{R}^N\}$

und $\dim \mathcal{H} = \text{rang}(A)$

Insbesondere gilt:

- a) $M > N$, so ist das Modell nicht vollständig.
- b) $M = N$, so ist das Modell vollständig, genau dann, wenn A invertierbar ist.
Dies ist dann der Fall, wenn die Basisfinanzgüter linear unabhängig sind.
- c) $M < N$, so ist das Modell vollständig genau dann wenn der Rang $A = M$.

2.21 Preisfestsetzung für nicht hedgebare Claims

Im folgenden betrachten wir ein endliches, arbitragefreies Einperioden-Modell mit Diskontfaktor $B > 0$. Also $|\Omega| < \infty$

Problem: Wie bewertet man einen nicht hedgebaren Claim C ?

Sei $\Pi(C)$ die Menge alle Anfangspreise für C , so daß das erweiterte Modell $\left(\begin{smallmatrix} a \\ S(0) \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} C \\ S(1) \end{smallmatrix} \right)$ arbitragefrei ist.

Aus dem No-Arbitrage-Theorem folgt:

$\Pi(C) = E^*BC : P^* \in \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}$ die Menge der Risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße im Ausgangsmodell bezeichnet.

„ $\subseteq$ “ $a \in \Pi(C) \xrightarrow{\text{das No-Arbitrage-Theorem liefert:}} \exists P^* : P^* \sim O, E^*BS(1) = S(0), E^*BC = a$

$\Rightarrow \exists P^* \in \mathcal{P}$ mit $a \in E^*BC$

„ $\supseteq$ “ Ist $P^* \in \mathcal{P}$ mit $a \in E^*BC$, so ergibt P^* ist risikoneutral im erweiterten Modell, also ist das erweiterte Modell arbitragefrei $\Rightarrow a \in \Pi(C)$

Frage: Was für eine Struktur hat $\Pi(C)$

Satz: Ist C nicht hedgebar, so ist $\Pi(C)$ eine nicht-leere, offene und konvexe Menge. Also ist $\Pi(C)$ ein nichtleeres, offenes Intervall.

Beweis: Es gilt:

$\Pi(C) = E^*BC : P^* \in \mathcal{P} \neq \emptyset$

Beachte wegen der Endlichkeit von Ω sind alle Claims interpretierbar. $\Pi(C)$ ist konvex, da $\mathcal{P}$ konvex ist.

$a_1, a_2 \in \Pi(C), a \in \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$

$a_1 = E_1^*BC, a_2 = E_2^*BC$, setze $P^* \lambda P_1^* + (1 - \lambda)P_2^*$

Dann gilt $P^* \in \mathcal{P}$ und $a = \lambda E_1^*BC + (1 - \lambda)E_2^*BC = E^*BC$

$\Rightarrow a \in \Pi(C)$

$\Pi(C)$ ist offen:

Sei $\mathcal{H}$ der Raum der hedgebaren Claims.

Da C nicht hedgebar ist, ist $\mathcal{H}$ ein echter Teilraum von L_0 (Menge alle ZV). Beachte $\dim L_0 = |\Omega| < \infty$

Zu $a \in \Pi(C)$ existiert ein $P^* \in \mathcal{P}$ mit $a = E^*BC$

Betrachte die Orthogonalzerlegung $L_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ auf $L_2(\Omega, A, P^*)$. Dann existiert ein $z \in \mathcal{H}^\perp$ mit $\|z\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ und $E^*ZC > 0$.

Setze $L_2 = 1 + z$, $L_1 = 1 - z$

Dann sind $L_1, L_2 > 0$ und $E^*L_2 = 1 + \underbrace{E^*Z}_{=0} = 1$, da $1 \in \mathcal{H}$

$E^*L_1 = 1 - E^*z = 1$, da $1 \in \mathcal{H}$

Also sind P_1^*, P_2^* definiert durch:

$\frac{dp_1^*}{dP^*} = L_1$, $\frac{dp_2^*}{dP^*} = L_2$ zu P^* äquivalente Maße mit $E_1^*BH = BE_1^*H = BE^*L_1H = B(E^*H - \underbrace{E^*ZH}_{=0, \text{ da } H \in \mathcal{H}}) = BE^*H$

Also ist $P_1^* \in \mathcal{P}$, genauso gilt dies für P_2^*

Weiter:

$a_1 := E^*BC = E^*(1 - Z)BC = a - \underbrace{BE^*ZC}_{>0} < a$

$a_2 := E_2^*BC = E_2^*(1 + Z)BC = a + BE^*ZC > 0$

Also ist $[a_1, a_2] \subset \Pi(C)$

2.22 Upper and lower Hedging

Bei einem nicht hedgebaren Claim C ist die Menge der arbitragefreien Preise ein nichtleeres, offenes Intervall.

Problem: Kann man das Intervall durch Handelstrategien charakterisieren?

Antwort: Konzept des upper and lower hedging.

Sei $|\Omega| < \infty$. Sei $\mathcal{H}$ der Raum der hedgebaren Claims.

Für $H \in \mathcal{H}$ bezeichne mit $V_0(H)$ dessen eindeutig bestimmter arbitragefreier Anfangspreis.

$P_+(C) = \inf\{V_0(H) : H \in \mathcal{H}, H \geq C\}$ heißt upper-hedging Preis und $P_-(C) = \sup\{V_0(H) : H \in \mathcal{H}, H \leq C\}$ heißt lower-hedging Preis.

Aus Arbitragegründen und $|\Omega| < \infty$ folgt: $-\infty < P_-(C) \leq P_+(C) < \infty$.

Satz: Für einen nicht hedgebaren Claim C gilt: $\Pi(C) = (P_-(C), P_+(C))$

Beweis:

„ $\supseteq$ “ Sei $P_-(C) < a < P_+(C)$

Annahme: $a \notin \Pi(C)$. Dann existiert ein Arbitrage $\tilde{x} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $\langle \tilde{x}, \tilde{S}(0) \rangle =$

$ya + \langle x, S(0) \rangle$ und $\langle \tilde{x}, \tilde{S}(1) \rangle = yC + \langle x, S(1) \rangle > 0$ beachte $\tilde{S}(0) = \begin{pmatrix} a \\ S(0) \end{pmatrix}$,

$$\tilde{S}(1) = \begin{pmatrix} c \\ S(1) \end{pmatrix}$$

1.Fall:

Dann sind wir long im Claim und können lower Hedge mit dem Anfangskapital a absichern. Genauer:

$$\left\langle \frac{1}{y}x, S(0) \right\rangle + a = 0 \text{ und } \left\langle \frac{1}{y}x, S(1) \right\rangle + C > 0$$

Wegen $C > \left\langle -\frac{1}{y}x, S(1) \right\rangle$ folgt: $P_-(C) < a = \left\langle -\frac{1}{y}x, S(0) \right\rangle \leq P_-(C) \Rightarrow$ Widerspruch

2.Fall: $y \leq 0$.

Das bedeutet eine shortposition im Claim: so daß ein upper Hedge mit a finanziert werden kann. Genauer:

$$\left\langle -\frac{1}{y}x, S(0) \right\rangle - a = 0 \text{ und } \left\langle -\frac{1}{y}x, S(1) \right\rangle - C > 0$$

wegen $C < \left\langle -\frac{1}{y}x, S(1) \right\rangle$ gilt: $P_+(C) = \left\langle -\frac{1}{y}x, S(0) \right\rangle \geq P_+(C) \Rightarrow$ Widerspruch

3.Fall $y = 0$

Dann wäre ein Arbitrage im Ausgangsmodell. $\Rightarrow$ Widerspruch

„ $\Leftarrow$ “ Also Arbitragegründen folgt sofort: $\Pi(C) \subset [P_-, P_+(C)]$, denn: Ist $a \in P(C)$ mit $a > P_+(C)$, so gibt es ein $H = \langle x, S(1) \rangle \in \mathcal{H}$ mit $P_+(C) \leq V_0(H) < a$ und $H \geq C$.

Gehe short in C und long in x liefert dann ein Arbitrage, da für $\tilde{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}$ gilt:

$$\langle \tilde{x}, \tilde{S}(0) \rangle = -a + V_0(H) < 0$$

$$\langle \tilde{x}, \tilde{S}(1) \rangle = -C + H \geq 0$$

Ist $a \in \Pi(C)$ mit $a < P_-(C)$, so gibt es ein $H = \langle x, S(1) \rangle \in \mathcal{H}$ mit $H \leq C, a < V_0(H) \leq P_-(H)$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$ liefert dann ein Arbitrage, da $\langle \tilde{x}, \tilde{S}(0) \rangle = a - V_0(H) < 0$

$$\langle \tilde{x}, \tilde{S}(1) \rangle = C - H \geq 0$$

Wegen der Offenheit von $\Pi(C)$ folgt schließlich $\Pi(C) \subset (P_-(C), P_+(C))$

09.11.2009

$$(C - P(C), P_+(C))$$

2.23 Zusammenhang zum Linear Programming

In einem endlich arbitragefreien Einperioden Modell kann der upper- und lower hedging price durch Lösen eines linearen Optimierungsproblems bestimmt werden.

$|\Omega| = M$, N Finanzgüter,

$S(0) \in \mathbb{R}^N$ Anfangspreis

$S(1) \in \mathbb{R}^N$ Endpreisvektor

Da Ω endlich ist, läßt sich $S(1)$ auch mittels der folgenden Matrix notieren: $M =$

$$\begin{pmatrix} S_1(1)(\omega_1) & S_2(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1(1)(\omega_M) & S_2(1)(\omega_M) & \dots & S_N(1)(\omega_M) \end{pmatrix}$$

$M(S)_{ij} = S_j(\omega_i)$ für alle $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$

Eingegebener Claim $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht dem Vektor $C = \begin{pmatrix} c_1(\omega_1) \\ \vdots \\ c(\omega_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{pmatrix}$

Ein Portfolio $x \in \mathbb{R}^N$ ist ein upper-Hedge für C , wenn

$$\sum_{i=1}^N x_i S_i(1)(\omega) = \langle x, S(1)(\omega) \rangle \geq C(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow M(S)x \geq C$$

Entsprechend lower hedge, falls $M(s)x \leq C$

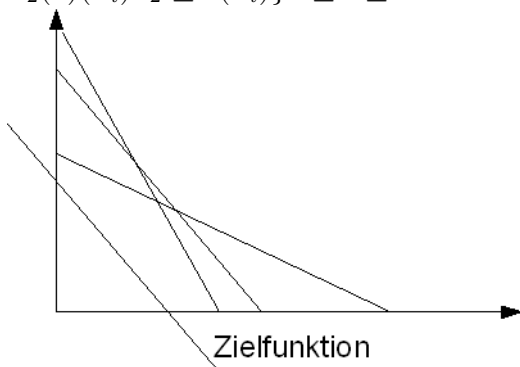
Zur Bestimmung des upperhedging price ist also zu lösen.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \langle x, S(0) \rangle$$

unter der Nebenbedingung $M(s)x \geq C$

Dies ist ein sogenanntes lineares Optimierungsproblem oder auch lineare Programm und kann mittels des Simplexalgorithmus gelöst werden.

Geometrische Veranschaulichung für den Fall $N = 2$: die M Nebenbedingungen sind Halbräume in $\mathbb{R}^2$ die oberhalb von Gerade liegen $\{x \in \mathbb{R}^2 : S_1(1)(\omega_i)x_1 + S_2(1)(\omega_i)x_2 \geq c(\omega_i)\} 1 \leq i \leq M$



Einer der Eckpunkt des durch die Geraden aufgespannten Polyeders ist die optimale Lösung

Zur Berechnung des lower hedging price, so entsprechen die Nebenbedingungen Halbräumen, die unterhalb von Geraden liegen und das Optimum ist wieder ein Eckpunkt des dadurch gebildeten Polyeders.

3 Exkurs stochastische Prozesse

3.1 Definition

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum $T \subset \mathbb{R}$, Zeitparametermenge, (E, ϵ) meßbarer Raum.

Eine Familie $(X_t)_{t \in T}$ von E -wertigen Zufallsvariablen $X_t : \Omega \rightarrow E$ heißt stochastischer Prozeß

Eine Familie $(F_t)_{t \in T}$ von unter σ -Algebra von F heißt Filtration, wenn $F_s \subset F_t$ für alle $s \leq t, s, t \in T$

$(X_t)_{t \in T}$ heißt adaptiert zu $(F_t)_{t \in T}$, wenn X_t meßbar ist bzgl. F_t für alle $t \in T$.

In der Regel:

$T \subseteq \mathbb{N}_0$ oder $T = [0, \infty)$ oder $T = [0, S]$

$E = \mathbb{R}^k, E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$

Beispiel: Preisentwicklung von den Finanzgütern über N Handelsperioden kann durch einen $\mathbb{R}^d$ -wertigen stochastischen Prozeß $(S(n))_{n=0, \dots, N}$ modelliert werden, der adaptiert ist bzgl. einer Filtration $(F_n)_{n=0, \dots, N}$

3.2 Das N-Perioden CRR-Modell

- Bankkonto mit Zinssatz r pro Periode,

Preisentwicklung ist deterministisch

$$\beta(0) = 1, \beta(n) = (1 + r)^n$$

- Aktie

$$\Omega = 0, 1, F(\rho(\Omega)), 0 < d < u$$

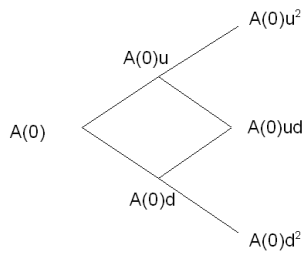
$$P((\omega_1, \dots, \omega_N)) = P^{|\{i: \omega_i=1\}|} (1-p)^{|\{i: \omega_i=0\}|}$$

$$Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow u^{\omega_1} d^{1-\omega_1} = \begin{cases} u & \text{falls } \omega_1 = 1 \\ d & \text{falls } \omega_1 = 0 \end{cases}$$

$A_0 \in \mathbb{R}$ sei der Anfangsaktienkurs:

$A(n) = A(0) * Y_1 Y_2 * \dots * Y_n$ der Kurs nach n -Perioden



Das CRR-Finanzmarktmodell ist dann beschränkt durch:

$$S(n) = \begin{pmatrix} \beta(n) \\ A(n) \end{pmatrix}, n = 1, \dots, N$$

$$= \begin{pmatrix} (1+r)^n \\ A(n) \end{pmatrix}, n = 1, \dots, N$$

$$F_n = \sigma(A_0, A_1, \dots, A_n) = \sigma(A_0, Y_1, \dots, Y_n)$$

Ein Call im CRR-Modell mit Laufzeit N Perioden entspricht der Claim $C = (A(N) - K)^+ = h(A(N))$

Zu vermuten ist, daß der Anfangspreis sich ergibt durch $E^*(\frac{1}{1+r})^N h(A(N))$ mit P^* bestimmt durch den Parameter $p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$

Dieser Wert kann durch ein rekursives Verfahren numerisch ausgerechnet werden.

Bild maximaler Wert $A(0)u^N$, minimaler Wert $A(0)d^N$ nach N Perioden

$$A(0)u^N \leftrightarrow h(A(0)u^N)$$

$$A(0)u^{N-1}d \leftrightarrow h(A(0)u^{N-1}d)$$

$$\frac{1}{1+r}(h(A(0)u^N)p^* + (1-p^*)h(A(0)u^{N-1}d))$$

Initialisierung:

for i = N downto 0 do

$$v_N(i) = h(A(0)u^i d^{N-i})$$

Rückwärtsinduktion:

For n = N-1 downto 0 do

For i = n downto 0 do

$$v_n(i) = \frac{1}{1+r}(v_{n+1}(i+1)p^* + (1-p^*)v_{n+1}(i))$$

return $(v_0(0))$;

Der Rückgabewert $v_0(0)$ erfüllt dann $v_0(0) = E^* \frac{1}{1+r}^N h(A(N))$

12.11.2009

3.3 Random Walk

Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen. Sei Y_0 unabhängig von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch:

$$S_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^n Y_i, n \in \mathbb{N}_0$$

wird eine Random Walk mit Startvariable Y_0 definiert. Durch $A_n = Y_0 \prod_{i=1}^n Y_i$, $n \in N_0$ wird ein geometrischer Random Walk definiert.

Im CRR-Modell ist $A(n) = A(0) \prod_{i=1}^n Y_i$, $(Y_n)_{n \in N}$ iid¹, $P(Y_n = u) = p = 1 - P(Y_N = d)$

3.4 Bedingter Erwartungswert

Sei (Ω, F, P) eine Wahrscheinlichkeitsraum.

- G Unter σ -Algebra von F
- $X : \Omega \rightarrow R$ meßbare bzgl F und es existiert EX

Dann gibt es ein

$Z : \Omega \rightarrow R$ mit

- (i) Z ist meßbar bzgl G
- (ii) $\int_A Z dP = \int_A X dp$ für alle $A \in G$

Z ist P fast sicher eindeutig bestimmt. Man nennt Z den bedingten Erwartungswert von X unter G .

Schreibweise:

$$Z = E(X|G) \stackrel{G=\sigma(Y)}{=} E(X|Y)$$

3.5 Faktorisierte bedingte Erwartung

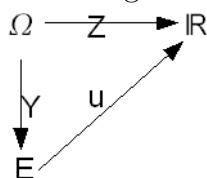
$X : (\Omega, F, P) \rightarrow (R, \mathcal{L})$ Zufallsgröße

$Y : (\Omega, F) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ meßbar

$G = \sigma(Y) = Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}$

Dann gilt:

- Eine Zufallsgröße $Z : \Omega \rightarrow R$ ist G -meßbar, genau dann, wenn es einen $\mathcal{E}$ meßbare Abbildung $h : E \rightarrow R$ gibt mit: $Z = h \circ Y$.



¹unabhängig identisch verteilt

P^Y - fast sicher eindeutig bestimmt

Im Falle:

$Z = E(X|Y)$ schreibt man $h(y) = E(X, Y = y)$ und nennt h den faktorisierten bedingten Erwartungswert.

3.6 Stochastischer Kern

Seien $(\Omega, F)(E, \mathcal{E})$ meßbare Räume. Ein stochastischer Kern K ist eine Abbildung $K: E \times F \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften.

- (i) $K(y, \cdot)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $y \in E$
- (ii) $K(\cdot, A)$ ist meßbar für alle $A \in F$

3.7 bedingte Verteilung

$X : (\Omega, F) \rightarrow (E_1, \mathcal{E}_1)$

$Y : (\Omega, F) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$, meßbare Abbildungen

Die bedingte Verteilung von X -gegeben Y - ist ein stochastischer Kern.

$K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \rightarrow [0, 1]$

derart, daß

$y \rightarrow K(y, A)$

eine Version der faktorisierten bedingten Erwartung von $1_A \circ X$ - gegeben Y ist für alle $A \in \mathcal{E}_1$. Also:

$K(y, A) = A(1_A \circ X|Y = y)$ für alle P^y - für alle $y \in E_2$

Schreibweise $(1_A \circ Y|Y = y) E(1_{X \in A}|Y = y) =: P(X \in A|Y = y)$

Entsprechend: $A(1_A \circ X|Y) = P(X = A|Y)$

Durch Erweiterungsschluß kann man zeigen:

$E(f(X)|Y = y) = \int f(x)K(y, dx)$

für jedes meßbare $f : E_1 \rightarrow R$ für das $Ef(x)$ existiert.

3.8 Beispiel: diskrete Zufallsvariablen

Sei $(E_1, \mathcal{E}_1)$ meßbar, E_2 abzählbar, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(E_2)$, $X : (\Omega, F, P) \rightarrow E_1$, $Y : (\Omega, F, P) \rightarrow E_2$

Definiere den stochastischen Kern

$K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \rightarrow [0, 1]$ durch

$$K(y, A) = \begin{cases} P(X \in A|Y = y) = \frac{P(X \in A, Y=y)}{P(Y=y)} & \text{falls } P(Y = y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \text{falls } P(Y = y) = 0 \end{cases}. \text{ Dann ist } K \text{ eine}$$

bedingte Verteilung von X-gegeben Y.

Argument:

$$\text{Für } A \in \mathcal{E}_1, B \subset E_2 \text{ gilt: } P(X \in A, Y \in B) = \sum_{y \in B, P(Y=y)>0} P(X \in A, Y = y) \\ \sum_{y \in B, P(Y=y)>0} K(A, y)P(Y = y) = \sum_{y \in B} K(A, y)P(Y = y) = \int_{[Y \in B]} K(A, Y(\omega))P(d\omega)$$

Also für alle $B \subset E_2$

$$\int_{Y \in B} 1_A \circ X dP = P(X \in A, Y \in B) = \int_{Y \in B} K(A, Y) dP$$

$$\Rightarrow K(A, Y) = P(X \in A|Y)P - \text{fast sicher}$$

$$\Rightarrow K(A, Y = y) = P(X \in A|Y = y) \text{ für } P^Y \text{ für alle } Y$$

Weiter kann man dann den bedingte Erwartungswert ausrechnen für $P(Y = y) > 0$, $E(f(X)|Y = y) = \int_{E_1} f(x)K(y, dx)$

3.9 Zufallsvariablen mit Lebesgue-Dichten

Sei (X, Y) eine zweidimensionaler Zufallsvektor im R^2 mit Lebesgue-Dichte h , d.h.

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_{A \times B} h(x, y)\lambda^2(dx, dy) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{L}$$

$$\text{Setze } f(y) = \int_R h(x, y)\lambda(dx)$$

Dann ist f meßbar nach Fubini und die Lebesgue-Dichte von Y , denn für alle $B \in \mathcal{L}$ gilt.

$$P(Y \in B) = P(X \in R, Y \in B) = \int_{R \times B} g(x, y)\lambda^2(dx, dy) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_B \int_R h(x, y)\lambda(dx)\lambda(dy)$$

Definiere einen stochastischen Kern

$$K : R \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$$

$$\text{durch } K(y, A) = \begin{cases} \int_A \frac{h(x, y)}{f(y)} dx & \text{falls } f(y) > 0 \\ \text{irgendwie} & \text{falls } f(y) = 0 \end{cases}$$

Dann ist K eine bedingte Verteilung von X - gegeben Y , denn:

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_{A \times B} h(x, y)\lambda^2(dx, dy) = \int_B \int_A h(x, y)\lambda(dx)\lambda(dy) \\ = \int_{B \cap f(y)>0} \int_A h(x, y)\lambda(dx)\lambda(dy) = \int_{B \cap f(y)>0} \int_A \frac{h(x, y)}{f(y)} \lambda(dx) f(y) \lambda(dy) \\ = \int_{B \cap f(y)>0} K(y, A) f(y) \lambda(dy) = \int_B K(y, A) f(y) \lambda(dy) = \int_B K(y, A) P^Y(dy) = \int_{Y \in B} K(Y, A) dP$$

Also ist $P(X \in A|Y) = K(Y, A)$ P -fast sicher

$$\Rightarrow P(X \in A|Y = y) = K(y, A) \text{ für } P^Y - \text{für alle } y, \text{ für alle } A \in \mathcal{E}_1$$

$\Rightarrow K$ ist bedingte Verteilung von X -gegeben Y .

Für y mit $f(y) > 0$ ist die Dichte der bedingten Verteilung von X -gegeben $Y = y$

$$K(y, dx) = \frac{h(x,y)}{f(y)} \lambda(dx)$$

insbesondere gilt:

$$E(g(X)|Y = y) = \int g(x) \frac{h(x,y)}{f(y)} \lambda(dx)$$

3.10 Eigenschaften der bedingten Erwartungswerte

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $G \subset F$ unter σ -Algebra

Seien X, X_1, X_2 Zufallsgrößen.

Dann gilt:

- (i) $E(\alpha X_1 + \beta X_2|G) = \alpha E(X_1|G) + \beta E(X_2|G)$ für alle $\alpha, \beta \in R$
- (ii) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow E(X_1|G) \leq E(X_2, G)$
- (iii) Ist Z eine G -meßbare Abbildung so gilt: $E(ZX|G) = ZE(X|G)$
- (iv) Aus $G_1 \subset G_2$, G_1, G_2 unter σ -Algebra
 $E(E(X|G_2)|G_1) = E(X|G_1)$
- (v) Sind X und G stochastisch unabhängig, so gilt:
 $E(X|G) = EX$
- (vi) Sind Z_1, Z_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$
und ist $h : E_1 \times E_2 \rightarrow (R, \mathcal{L})$ meßbar mit existierendem $Eh(Z_1, Z_2)$, so gilt
 $E(h(Z_1, Z_2)|Z_2 = z) = Eh(Z_1, z)$ für P^{Z_2} - für alle $z \in E_2$
- (vii) $E(E(X|G)) = EX$

Bei allen Formeln setzen wir voraus, daß alle bedingten Erwartungswerte existieren.

16.11.2009

3.11 Bestapproximation

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. X Zufallsgröße mit $EX^2 < \infty$.

Sei $G \subset F$, σ -Algebra

$L_2(\Omega, F, P) = \{Y : \Omega \rightarrow R, Y \text{ ist } F \text{ meßbar } EY^2 < \infty\}$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt.

$$\langle Y, Z \rangle := EYZ \text{ für alle } Y, Z \in L_2(\Omega, F, P), \|Y\|_2 = \sqrt{\langle Y, Y \rangle}$$

$L_2(\Omega, G, P) = \{Z : \Omega \rightarrow R : Z \text{ ist } G \text{ meßbar und } EZ^2 < \infty\}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L_2(\Omega, F, P)$

Für $\tilde{X} := E(X|G)$ gilt:

$\tilde{X}$ ist die Orthogonalprojektion von X auf $L_2(\Omega, G, P)$ und erfüllt somit

$$\|X - \hat{X}\|_2^2 = \int_{z \in L_2(\Omega, G, P)} \|X - Z\|_2^2$$

Beweis: Es gilt:

$$X = \hat{X} + (X - \hat{X})$$

z.z: $X - \hat{X} \perp Z$ für alle $z \in L_2(\Omega, G, P)$

Die Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes impliziert:

$$\langle 1_A, X \rangle = \int_A X dP = E 1_A X = \int_A \hat{X} dP$$

$$= \langle 1_A, \hat{X} \rangle \text{ für alle } A \in G.$$

$$\Rightarrow \langle 1_A, X - \hat{X} \rangle = 0 \text{ für alle } A \in G$$

Linearität und Stetigkeitsargumente liefern $\langle Z, X \rangle = EZX = EZ\hat{X} = \langle z, \hat{X} \rangle$ für alle $z \in L_2(\Omega, G, P)$

Also gilt: $\langle Z, X - \hat{X} \rangle = 0$ für alle $Z \in L_2'(\Omega, G, P)$ also ist $\hat{X}$ Orthogonalprojektion von X auf $L_2(\Omega, G, P)$

Die Bestapproximation folgt mit Pythagoras $\|X - Z\|_2^2 = \|X - \hat{X} + \hat{X} - Z\|_2^2 = \|X - \hat{X}\|_2^2 + \underbrace{\|X - Z\|_2^2}_{\geq 0} \geq \|X - \hat{X}\|_2^2$

Also minimiert $\hat{X}$ den mittleren quadratischen Fehler.

3.12 Martingale

Sei $(F_t)_{t \in T}$ eine Filtration und $M = (M_t)_{t \in T}$ ein adaptierter reellwertiger stochastischer Prozeß.

M heißt Martingal, falls gilt:

1. $E|M_t| < \infty$ für alle $t \in T$
2. $E(M_t, F_s) = M_s$ für alle $s \leq t$

M heißt Submartingal, falls gilt:

1. $E|M_t| < \infty$ für alle $t \in T$
2. $E(M_t, F_s) \geq M_s$ für alle $s \leq t$

M heißt Supermartingal, falls gilt:

1. $E|M_t| < \infty$ für alle $t \in T$
2. $E(M_t, F_s) \leq M_s$ für alle $s \leq t$

3.13 Beispiel

a) Random Walk

$$E|X_i| < \infty$$

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n x_i, F_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$$

Dann gilt:

$$E(S_{n+1}|F_n) = E(S_n + X_{n+1}|F_n) = E(S_n|F_n) + E(X_{n+1}|F_n) = S_n + EX_{n+1}$$

Also ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal genau dann, wenn $EX_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Submartingal genau dann, wenn $EX_1 \geq 0$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Supermartingal genau dann wenn $EX_n \leq 0$

b) geometrische Random Walk

$$A_n = A_0 \prod_{i=1}^n Y_i, (Y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ iid}, E|Y_1| < \infty, A|A_0| < \infty$$

$$F_n = \sigma(A_1, \dots, A_n) = \sigma(A_0, Y^1, \dots, Y_n)$$

$$E(A_{n+1}|F_n) = E(A_n Y_{n+1}|F_n) = A_n E(Y_{n+1}|F_n) = A_n EY_{n+1}$$

$A_n (n \in \mathbb{N}_0)$ ist Martingal genau dann, wenn $EY_1 = 1$

Gilt $A_0 \geq 0, Y_1 \geq 0, P$ fast sicher, so ist

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ein } \begin{cases} \text{sub} \\ \text{super} \end{cases} \text{ Martingal} \Leftrightarrow EY_1 \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} 1$$

3.14 Stopzeit

Sei $(F_t)_{t \in T}$ eine Filtration

$\tau : \Omega \rightarrow T \cup +\infty$ heißt Stopzeit, falls $\tau \leq t \in F_t$, für alle $t \in T$

Stopzeiten: = Verkaufsstrategien

„Die Entscheidung“ über t hinaus ein Finanzgut zu halten kann nur von der Information, die bis zum Zeitpunkt t abhängen.

Beispiel:

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch reellwertiger $F_n = \sigma(A_0, \dots, A_n), n \in \mathbb{N}, \tau = \inf n \in \mathbb{N} : A_n \geq a$,
 $a \in \mathbb{R}$ ist eine Stopzeit, denn $\tau < n \Rightarrow A_0 < a, A_1 < a, \dots, A_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Weiter gilt:

$$\tau = +\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} A_n < a$$

$\tau = \inf 1 \leq k \leq N : A_k = \max A_0, \dots, A_n$ ist keine Stopzeit, da zur Entscheidung, ob fortgesetzt wird, der Prozeß in die Zukunft hinein beobachtet werden muss.

3.15 Martingal als faires Glücksspiel

Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Filtration M ein adaptierter stochastischer Prozeß mit $E|M_n| < \infty$
 M_n = Auszahlung, die ein Spieler erhält, wenn er das Spiel zum Zeitpunkt n beendet.

Stopzeiten = Strategien, die ein Spieler prinzipiell verwirklichen kann.

τ heißt beschränkte Stopzeit, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $\tau(w) \leq N$ für P -fast alle $w \in \Omega$

Beschränkte Stopzeiten sind Strategien, die in einer endlichen Zeit verwirklicht werden können.

Satz:

M ist ein Martingal genau dann, wenn $EM_\tau = EM_0$ für jede beschränkte Stopzeit τ gilt: d.h. durch Spielen des Glücksspiels kann sich ein Spieler im Mittel weder verbessern noch verschlechtern. (faires Glücksspiel)

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ Sei τ Stopzeit mit $\tau \leq N$, $EM_\tau = E \sum_{n=0}^N M_\tau W_{\tau=n} = E \sum_{n=0}^N M_n 1_{\tau \geq n} =$
 $E(E(M_n|F_n)1_{\tau \geq n})$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N EM_n 1_{\tau \geq n} &= \sum_{n=0}^N E(E(M_n|F_n)1_{\tau \geq n}) \\ &= \sum_{n=0}^N E(E(1_{\tau \geq n} M_n | F_n)) \\ &= \sum_{n=0}^N E(M_n 1_{\tau \geq n}) = EM_N 1_{\tau \leq N} = EM_N = EM_0 \end{aligned}$$

da $EM_0 = E(E(M_N|F_0)) = EM_N$

„ $\Leftarrow$ “ Sei $k < n$

z.z. $E(M_n|F_k) = M_k$, d.h. $\int_A M_n dP = \int_A M_k dP$ für alle $A \in F_k$

Zu $A \in F_k$ definiere beschränkte Stopzeit τ_A durch

$$\tau_A(w) = \begin{cases} k & 0 \leq w \leq k \\ n & w > k \end{cases}$$

$$\tau_A = k1_A + n1_{A^c}$$

τ_A ist Stopzeit, denn

$$\tau > l = \begin{cases} \Omega & \text{für } 0 \leq l \leq k-1 \\ A^c & \text{für } k \leq l \leq n-1 \\ \emptyset & \text{für } l \geq n \end{cases}$$

Es gilt: $EM_0 = EM_{\tau_A} = EM_k 1_A + EM_n 1_{A^c}$

$$= EM_n - EM_n 1_A + EM_k 1_A$$

Da $EM_0 = EM_n$ (beschränkte $\tau = n$), gilt $EM_n 1_A = EM_k 1_A$ und damit folgt die Behauptung.

19.11.2009

3.16 Optional Sampling

Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Martingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

(i) Für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt: $EM_\tau = EM_0$

(ii) Für jede Stopzeit τ mit $P(\tau < \infty) = 1$

$$E|M_\tau| < \infty, E|M_n|1_{\tau < n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt:

$$EM_\tau = EM_0$$

Beweis:

(i) ist in (3.15) gezeigt $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$

(ii) Approximiere τ durch $\tau \wedge n$. Wegen (i) gilt $EM_{\tau \wedge n} = EM_0$

$$\begin{aligned} \text{Also: } |EM_\tau - EM_0| &= |EM_\tau - EM_{\tau \wedge n}| = |EM_\tau - EM_\tau 1_{\tau \leq n} - EM_n 1_{\tau > n}| = \\ &= |EM_\tau 1_{\tau > n} - EM_n 1_{\tau > n}| \leq E|M_\tau| 1_{\tau > n} + E|M_n| 1_{\tau > n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

3.17 Beispiel

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid, mit $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = -1)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, n \in \mathbb{N}_0$$

Bei einem Anfangskapital von k Euro beschreibt:

$$S_N^{(k)} = k + S_n, n \in \mathbb{N}_0$$

den Gewinnstand(Vermögen) nach n -Spielen.

Wir spielen solange, bis wir einen Gewinn von l Euro hinzugewonnen haben oder ruiniert sind.

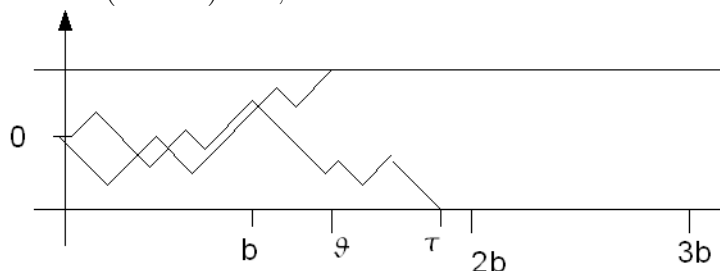
$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n^{(k)} = 0 \text{ oder } S_n^{(k)} = k + l\}$ beschreibt den zufälligen Zeitpunkt, an dem wir das Spiel beenden.

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k \text{ oder } S_n = l\}$$

$$\{S_\tau = -k\} = \{S_n^{(k)} = 0\} = \text{Ruin}$$

$$\{S_\tau = l\} = \{S_n^{(k)} = k + l\} = \text{Gewinn}$$

Beh.: $P(\tau < \infty) = 1, E\tau < \infty$



Setze $b = k + l$

Für jedes $n \in m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P(\tau > mb) \leq P(S_b \leq b-1, S_{sb} - S_b \leq b-1, \dots, S_{mb} - S_{(m-1)b} \leq b-1)$$

$$\stackrel{S_b, S_{2b}-S_b, \dots, S_{mb}-S_{(m-1)b} \text{ iid}}{=} P(S_b \leq b-1)^m$$

$$= (1 - P(S_b > b-1))^m$$

$$= (1 - P(S_b = b))^m$$

$$= (1 - P(X_n = 1, \dots, X_b = 1))^m = (1 - p^b)^m$$

Für $n > b$ folgt:

$$P(\tau > n) \leq P(\tau > \lfloor n/b \rfloor b), \text{ da } \lfloor n/b \rfloor \leq n$$

$$\leq (1 - p^b)^{\lfloor n/b \rfloor} \leq (1 - p^b)^{n/b-1}, \text{ da } n/b - 1 \leq \lfloor n/b \rfloor$$

$$= \frac{1}{1-p^b} ((1 - p^b)^{1/b})^b$$

$$\text{Setze } a = \frac{1}{1-p^b}, \gamma = (1 - p^b)^{1/b}$$

Dann ist $a > 0$ und $0 < \gamma < 1$

$$P(\tau > n) \leq a\gamma^n \text{ für alle } n > b$$

$$\text{Also } P(\tau = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau > n) = 0$$

$$E\tau = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau > n) \leq \infty$$

(i) der faire Fall: $p = \frac{1}{2}$

Dann ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal mit $E|S_\tau| \leq \max\{k, l\} < \infty$

$$E|S_n|1_{\tau > n} \leq \max\{k, l\} P(\tau > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Optional-Sampling liefert:

$$0 = ES_0 = ES_\tau = -kP(S_\tau = -k) + lP(S_\tau = l)$$

Zusammen mit:

$$1 = P(S_\tau = -k) + P(S_\tau = l) \text{ folgt:}$$

$$P(S_\tau = -k) = \frac{l}{k+l} \text{ Ruinwahrscheinlichkeit}$$

$$P(S_\tau = l) = \frac{k}{k+l} \text{ Gewinnwahrscheinlichkeit}$$

(ii) der unfaire Fall: $p \neq 0$

Betrachte den geometrischen Random Walk

$$A_n = S^{S_n} = \prod_{i=1}^n a_i^X \text{ mit } a > 0$$

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist ein Martingal} \Leftrightarrow Ea^{X_1} = 1$$

$$\Leftrightarrow ap + 1/a(1-p) = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2p - a + (1-p) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ oder } a = \frac{1-p}{p}$$

Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist $\frac{1-p}{p} \neq 1$

$$\text{Weiter gilt: } E|A_\tau| = E|A^{S_\tau}| \leq \max\{a^{-k}, a^l\} < \infty$$

$$E|A_n|1_{\tau > n} \leq \max\{a^{-k}, a^l\} P(\tau > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Optional Sampling liefert:

$$1 = EA_\tau = a^{-k}P(S_\tau = -k) + a^lP(S_\tau = l)$$

Zusammen sind: $P(S_\tau = -k) + P(S_\tau = l) = 1$

$$P(S_\tau = -k) = \frac{a^k - a^{k+l}}{1 - a^{k+l}} = \frac{1 - a^l}{a^{-k} - a^{k+l}}$$

$$P(S_\tau = l) = \frac{1 - a^k}{1 - a^{k+l}} = \frac{a^{-k} - 1}{a^{-k} - a^l}$$

Im Fall $p = 18/37$

$$a \approx 1.05$$

$$k = l = 10, r(k) = P(S_\tau = -k) \approx 0,63$$

$$k = l = 20, r(k) = 0,74$$

$$k = l = 100, r(k) = 0,995$$

3.18 Vorhersehbare Prozesse

Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Filtration $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein stochastischer Prozess.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt previsibel (vorhersehbar), wenn $X_n F_{n-1}$ -meßbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$

Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal und zusätzlich previsibel, so gilt $X_N = X_0$ P - fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Beweis: } X_n \xrightarrow{\text{Martingal}} E(X_{n+1}|F_n) \xrightarrow{\text{previsible}} X_{n+1}$$

3.19 Doob-Meyer-Zerlegung

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein zu einer Filtration $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ adaptiert reellwertiger Prozeß mit $E|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dann existiert genau eine 'Zerlegung der Form $X_n = Y + M_n + \Lambda_n$, P-fast sicher für alle $n \in N_0$

mit

- (i) Y ist F_0 -meßbar
- (ii) $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal mit $M_0 = 0$
- (iii) $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist vorhersehbar und $\Lambda_0 = 0$

Ist $X_n = Y' + M'_n + \Lambda'$ für alle $n \in N$

eine weitere Zerlegung, so gilt: $Y = Y', M_n = M'_n, \Lambda_n = \Lambda'_n$ für alle $n \in N_0$, P-fast sicher

Beweis:

Existenz: Setze $M_0 = 0, \Lambda_0 = 0, Y = X_0$, dann $X_1 = X_1 - X_0 + X_0$

$$= \underbrace{X_1 - E(X_1|F_0)}_{M_1 - M_0 = M_1} + \underbrace{E(X_1|F_0) - X_0}_{=: \Lambda_1} + X_0$$

und rekursiv für $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} = X_{n+1} - X_n + X_n$$

$$= X_{n+1} - E(X_{n+1}|F_n) + E(X_{n+1}|F_n) - X_n + M_n + \Lambda_n + Y$$

$$= \underbrace{M_n + (X_{n+1} - E(X_{n+1}|F_n))}_{M_{n+1}} + \underbrace{(\Lambda_n + (E(X_{n+1}|F_n) - X_n))}_{\Lambda_{n+1}} + Y$$

Dann gilt:

$$X_n = M_n + \lambda_n + X_0 \text{ P-fast sicher}$$

$(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Martingal, da $E(M_{n+1}|F_n) = M_n + E(X_{n+1}|F_n) - E(X_{n+1}|F_n) = M_n$
für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist vorhersehbar

$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + E(X_{n+1}|F_n) - X_n$ ist F_n -meßbar

Eindeutigkeit: $Y + M + \Lambda = Y' + M' + \Lambda'$

Wegen $M_0 = 0 = M'_0, \Lambda_0 = 0 = \Lambda'_0$ gilt $Y_0 = Y'_0$ P-fast sicher

$$M - M' = \Lambda' - \Lambda + Y' - Y$$

Also ist $M - M'$ ein previsible Martingal $\Rightarrow M_n - M'_n = M_0 - M'_0$ P-fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$

Also auch $\Lambda_n - \Lambda'_n = M_n - M'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

23.11.2009

Ist X ein Submartingal, so gibt es genau eine Zerlegung der Form $X = X_0 + M + A$ mit

(i) $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal mit $M_0 \equiv 0$

(ii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $A_0 \equiv 0$

Ist X ein Supermartingal so gibt es genau eine Zerlegung $X = X_0 + M - B$

(i) $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Martingal mit $M_0 \equiv 0$

(ii) $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist wachsend, vorhersehbar mit $B_0 \equiv 0$

Beweis: Im Submartingalfall ist der Doob-Mehr-Zerlegung

$$A_{n+1} = \Lambda_{n+1} - \Lambda_n + E(X_{n+1}|F_n) - X_n$$

Im Supermartingalfall analog mit $B_n = -\Lambda_n$

3.20 Beispiele

1. Random Walk

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, E|X_i| < \infty, \mu = EX_1$$

Dann gilt:

$$S_n = S_0 + S_n - S_0 = S_0 + \underbrace{S_n - S_0 - n\mu}_{M_n} + \underbrace{n\mu}_{\Lambda_n}$$

Λ_n ist deterministisch

Λ_n ist wachsend $\Leftrightarrow \mu \geq 0 \Leftrightarrow S$ ist Submartingal Λ_n ist fallend $\Leftrightarrow \mu \leq 0 \Leftrightarrow S$ ist Supmartingal

Sei $\mu = 0$. Dann ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal. Sei $EX_1^2 < \infty$

Dann ist $(S_n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal

Doob-Meyer-Zerlegung

$$S_n^2 = S_0^2 + S_n^2 - S_0^2 - nEX_1^2 + nEX_1^2 \\ = S_0^2 + M_n + \Lambda_n$$

$$\text{mit } M_n = S_n^2 - S_0^2 - nEX_1^2, \Lambda_n = nEX_1^2$$

$$(M_n) \text{ ist ein Martingal, dann } E(S_{n+1}^2 | F_n) = E(S_n^2 + 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 | F_n) = S_n^2 + 2S_n \underbrace{E(X_{n+1} | F_n)}_{=0} + E(X_{n+1}^2 | F_n)$$

$$= S_n^2 + EX_{n+1}^2 = S_n^2 + EX_1^2.$$

$$\text{Also } E(M_{n+1} | F_n) = S_n^2 + EX_1^2 - S_0^2 - (n+1)EX_1^2 = S_n^2 - S_0^2 - nEX_1^2 = M_n$$

2. geometrische Random Walk

$$A_n = A_0 \prod_{i=1}^n Y_i, E|Y_i| < \infty, \mu = EY_1$$

Doob-Meyer Zerlegung hat die Form

$$A_n = A_0 + M_n + \Lambda_n \text{ mit } M_{n+1} = M_n + (A_{n+1} - E(A_{n+1} | F_n))$$

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + (E(A_{n+1} | F_n) - A_n)$$

Wegen $E(A_{n+1} | F_n) = E(Y_{n+1} A_n | F_n) = A_n E(Y_{n+1} | F_n) = A_n EY_{n+1} = A_n EY_1 = A_n \mu$ folgt:

$$M_{n+1} = M_n + A_{n+1} - A_n \mu = M_{n-1} + A_n - A_{n-1} \mu + A_{n+1} - A_n \mu = \dots = \sum_{i=1}^{n+1} A_i - A_{i-1} \mu$$

$$\text{sowie: } \Lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (\mu A_{i-1} - A_{i-1})$$

Also folgt insbesondere:

$$(A_n) \text{ Martingal} \Leftrightarrow \Lambda_n = 0 \text{ f\"ur alle } n \in N \Leftrightarrow \mu = 1$$

Ist $A_n \geq 0$ p-fast sicher f\"ur alle $n \in N$

$$(A_n)_{n \in N} \text{ ist Submartingal} \Leftrightarrow (\Lambda_n) \text{ wachsend}$$

$$\Leftrightarrow \mu A_n - A_n \geq 0 \text{ f\"ur alle } n \in N$$

$$\Leftrightarrow \mu > 1$$

Entsprechend f\"ur das Supermartingal:

$$(A_n)_{n \in N} \text{ ist Supermartingal} \Leftrightarrow (\Lambda_n) \text{ fallend} \Leftrightarrow \mu A_n - A_n \leq 0 \text{ f\"ur alle } n \in N$$

$$\Leftrightarrow \mu \leq 1$$

3.21 Prä τ - σ -Algebra

Sei $(F_t)_{t \in T}$ eine Filtration und τ eine Stopzeit

Durch $F_\tau := \{A \in F : A \cap \tau \leq t F_t \text{ für alle } t \in T\}$

wird die sogenannte Prä- τ - Sigmaalgebra definiert und gibt die Information wieder, die bis zum zufälligen Zeitpunkt τ überfrachtbar ist.

Es gilt:

- (i) $F_\tau = f_t$, falls $\tau \equiv t$
- (ii) $F_\tau \subset F_\sigma$, für $\tau \leq \sigma$
- (iii) Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow (E; \mathcal{E})$ ist F_τ -meßbar genau dann, wenn für jedes $t \in T$
 $X_t := X 1_{\tau \leq t} + e 1_{\tau > t}$
 F_t -meßbar ist für alle $t \in T$
Hier bei ist $e \in E$ willkürlich gewählt
- (iv) $T = N_0$, $(X_n)_{n \in N_0}$ ein adaptierter Prozeß
Dann ist $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega) 1_{\tau < \infty}(\omega) = \sum_{n \in N_0} X_n(\omega) 1_{\tau = n}(\omega)$
 $X_\tau = \sum_{n \in N_0} X_n 1_{\tau = n}$
 F_τ -meßbar

3.22 Satz

Sei $(M_n)_{n \in N_0}$ ein Martingal und seine σ, τ beschränkte Stopzeiten mit $\sigma \leq \tau \leq n$ für ein $n \in N_0$

Dann gilt:

- (i) $M_\tau = E(M_N | F_\tau)$ P-fast sicher
- (ii) $M_\sigma = E(M_\tau | F_\sigma)$ P-fast sicher

Beweis:

z.z.: $\int_A M_\tau dP = \int_A M_n dP$ für alle $A \in F_\tau$

$$\int_A M_\tau dP = \sum_{k=0}^N \int_A M_\tau 1_{\tau=k} dP$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^N \int_{\underbrace{A \cap \tau = k}_{\in F_k}} M_k dP \\
 &= \sum_{k=0}^N \int_{A \cap \tau = k} M_N dP = \int_A M_N dP
 \end{aligned}$$

Zu (ii)

$$\begin{aligned}
 E(M_\tau | F_\sigma) &\stackrel{(i)}{=} E(E(M_n | F_\tau) | F_\sigma) \\
 &\stackrel{\text{da } F_\tau \supset F_\sigma}{=} E(M_n | F_\sigma) \stackrel{(i)}{=} M_\sigma
 \end{aligned}$$

3.23 Satz

Sei $(X_n)_{n \in N_0}$ ein zu $(F_n)_{n \in N_0}$ adaptierter Prozeß mit $E|X_n| < \infty$ für alle $n \in N_0$.
Seien σ, τ beschränkte Stopzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt

- (i) Ist (X_n) ein Supermartingal, so ist $E(X_\tau | F_\sigma) \leq X_\sigma$
- (ii) Ist $(X_n)_{n \in N_0}$ ein Submartingal, so ist $E(X_\tau | F_\sigma) \geq X_\sigma$

Beweis: klar mit Doob-Meyer-Zerlegung

$$X_n = X_0 + M_n + \Lambda_n$$

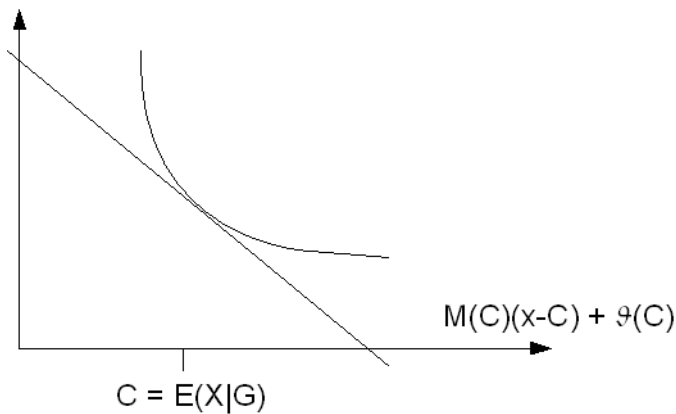
$$E(X_\tau | F_\sigma) = X_0 + E(M_\tau | F_\sigma) + E(\Lambda_\tau | F_\sigma) = X_0 + M_\sigma + \Lambda_\sigma + E(\underbrace{\Lambda_\tau - \Lambda_\sigma}_{\substack{\geq 0 \text{ im Submartingalfall,} \\ \leq 0 \text{ im Supermartingalfall}}} | F_\sigma)$$

3.24 Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvexe mit $E|X| < \infty$, $E|\phi(X)| < \infty$. $\mathcal{G}$ sei Unter- σ -Algebra:
Dann gilt:

$$E(\phi(X) | \mathcal{G}) \geq \phi(E(X | \mathcal{G}))$$

Beweis: wegen der Konvexität von ϕ existiert ein $\mathcal{G}$ -meßbares M , so daß $\phi(X) \geq M(X - E(X | \mathcal{G})) + \phi(E(X | \mathcal{G}))$



Also:

$$E(\phi(X)|G) \geq \phi(E(X|G)), \text{ da } M\text{-}G\text{-meßbar und } E(X - E(X|G)|G) = 0$$

3.25 Folgerung

Sei $(M_t)_{t \in T}$ ein stochastischer Prozeß mit Werten in (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$

$\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex mit $E|\phi(M_t)| < \infty$ für alle $t \in T$

Dann ist $(\phi(M_t))_{t \in T}$ ein Submartingal, falls M ein Martingal ist, oder M ein Submartingal und ϕ monoton wachsend ist.

Beweis: Sei M Martingal $E(\phi(M_t)|F_s) \geq \phi(E(M_t|F_s)) \geq \phi(M_s)$

Insbesondere:

- (i) Ist M ein Martingal $\Rightarrow (|M_t|_t \in T)$ Submartingal
- (ii) Ist N ein positives Submartingal mit $EN_t^P < \infty$, so ist $(N_t^P)_{t \in T}$ ein Submartingal für alle $p \geq 1$
 Ist M ein Martingal mit $E|M_t|^P < \infty$ für alle $t \in T$
 so ist $(|M_t|^P)_{t \geq 0}$ ein Submartingal

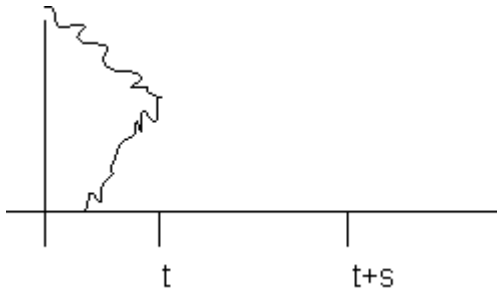
26.11.2009

3.26 Markov-Prozeß

Ein zu einer Filtration $(F_t)_{t \in T}$ adaptiv, Prozeß $(X_t)_{t \in T}$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$ heißt Markov-Prozeß, falls:

$$P(E_{t+s} \in A|F_t) = P(X_{t+s} \in A|X_t) \text{ P-fast sicher}$$

für alle $s, t \in T, A \in \mathcal{E}$



Bezeichnet $K_{t,t+s}$ die bedingte Verteilung von x_{t+s} - gegeben X_t , so nennt man $(K_{t,t+s})_{t,s \in T}$ die Familie der Übergangskerne von X .

Es gilt:

$\omega \rightarrow K_{t,t+s}(X_t(\omega), A)$ ist eine Version von $P(X_{t+s} \in A | F_t)$ für alle $A \in \mathcal{E}$.

Durch Erweiterungsschluß erhält man:

$E(f(x_{s+t}) | F_t)(\omega) = \int_E f(x) K_{t,s+t}(X_t(\omega), dy)$ für jedes $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar mit existierendem $E(X_{s+t})$

X heißt zeitlich homogen, falls $K_{t,t+s} = K_{0,s}$ für alle $s, t \in T$

Beispiel:

1. Random-Walk

$S_n = s_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, S_0 unabhängig von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X_n iid, $X_1 \sim F$

Das ist ein zeitlich homogener Markovprozeß mit Übergangskern.

$$K_n(x, A) = K_{0,n}(x, A) = P(S_n \in A | S_0 = x) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \in A - x\right) = F^{*(n)}(A - x)$$

bzgl. $F_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$

denn $P(S_{n+k} \in A | F_n)(\omega) = P(S_{n+k} - S_k + S_k \in A | F_k)(\omega) = P(S_{n+k} - S_k + S_k \in A | S_0, \dots, S_k)(\omega)$

$$= P(S_{n+k} - S_k + S_k(\omega) \in A) = P(S_{n+k} - S_k \in A - S_k(\omega)) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i \in A - S_k(\omega)\right)$$

= .. = gleiche Schritte Rückwärts nur mit S_k anstelle von $S_0, \dots, S_k$

$$= P(S_{n+k} - S_k + S_k \in A | S_k)(\omega)$$

$$= P(S_{n+k} \in A | S_k)(\omega)$$

Also ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Markov-Prozeß mit $\underbrace{P(S_{n+k} \in A | S_k = x)}_{P\left(\sum_{i=1}^n X_i \in A - x\right)} = K_n(x, A)$

$$\underbrace{P\left(\sum_{i=1}^n X_i \in A - x\right)}_{F^{*n}(A - x)}$$

2. Gemetischer Random-Walk

$A_n = A_0 \prod_{i=1}^n Y_i$ unabhängig von $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$Y_n > 0 (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$F_n = \sigma(A_n, A_1, \dots, A_n) = \sigma(A_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein zeitlich homogener Markov-Prozeß mit

$$P(A_{n+1} \in B | A_n = x) = P(A_n \frac{A_{n+1}}{A_n} \in B | A_n x)$$

$$= P(x \frac{A_{n+1}}{A_n} \in B) = P(Y_{n+1} \in B/x)$$

für alle $B \in \mathcal{L}(0, \infty)$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Genauer erhält man $K_n(x, B) = P(A_n \in B | A_0 = x) = P(A_0, \frac{A_n}{A_0} \in B | A_0 =$

$$x) = P(\frac{A_n}{A_0} \in \frac{B}{x}) = P(\prod_{i=1}^n Y_i \in \frac{B}{x})$$

Beweis ist analog zum Random-Walk.

Hinweis zur Übungsaufgabe

Bewertung eines Derivates mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation.

allgemein:

X Zufallsvariable mit Werten in E

$$h : E \rightarrow \mathbb{R}$$

zu bestimmen: $Eh(x) = \int h(x) P^X(dx)$

Numerische Verfahren sind nicht immer anwendbar, insbesondere bei nicht glatten Funktionen h .

Ausweg: MC-Simulation, Motiviert durch das starke Gesetz der großen Zahlen.

Vorgehen: - Simuliere n Realisationen:

$x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$, wobei $X_1, \dots, X_n$ iid mit $X_i \sim X$

approximiere $Eh(X)$ durch $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Eh(X) P$ fast sicher

Anwendung hier:

das Derivate liefert eine zufällige Auszahlung C_n am Ende der n -ten Periode für $n = 1, \dots, N$

Bewertung durch:

$$E^* \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+\rho} {}^n C_n = E^* h((C_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

$$h(c_1, \dots, c_n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+\rho} {}^n C_n$$

4 Das Mehrperiodenmodell

- Einperiodenmodell ist nicht praxisrelevant
- Handel ist zu einfach
- Menge der hedgebaren Claims ist zu klein

Verbesserung:

Ausdehnung auf mehrere Perioden

4.1 Diskretes Mehrperioden Finanzmarktmodell

- N Handelszeitpunkte $0, 1, \dots, N-1 = N$ Perioden
- Informationsverlauf $(F_n)_{n=0, \dots, N}$
- d Finanzgüter mit zu (F_n) adaptierten Preisprozeß $S = (S(n))_{n=0, \dots, N}$
 $S(n) : \Omega \rightarrow R^d$ gibt des Preis der Finanzgüter nach n -Perioden
- Das erste Finanzgut ist eine risikofreie Anlage (Geldmarktkonto)

$$S_1(n) = \prod_{i=1}^n (1 + \rho(i)) \text{ für } n = 0, \dots, N$$

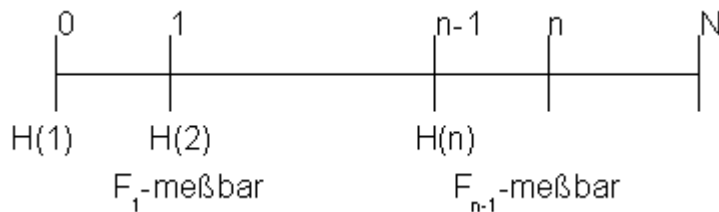
wobei $(\rho(i))_{i=1, \dots, N}$ ein vorhersehbarer Prozeß ist mit $\rho(i) > -1$ für alle $1 \leq i \leq N$
 $\rho(n)$ kann als Zinsrate aufgefasst werden, mit dem ein Kapital auf einem Geldmarktkonto in der n -ten Periode verzinst wird

1 Euro angelegt im Geldmarktkonto hat einen Wert von

$$\beta(n) = \prod_{i=1}^n (1 + \rho(i)) = S_1(n) \text{ Euro nach } n \text{ Perioden.}$$

$$B(n) = \frac{1}{\beta(n)}, n = 0, \dots, N$$

heißt Diskontierungsprozeß und ist vorhersehbar.



- eine Handelsstrategie $(H(n))_{n=1, \dots, N}$ ist ein vorhersehbarer Prozeß mit Werten in R^d

$$H(n) : \Omega \rightarrow R^d$$

$H_j(n)$ bezeichnet die Anzahl an Einheiten des j -ten Finanzgutes, die in der n -ten Periode, d.h. $n-1$ bis n , gehalten werden.

- Entnahmeprozeß

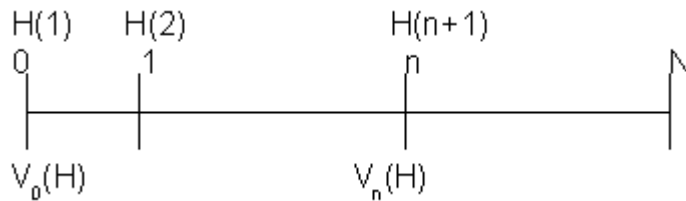
zu einer Handelsstrategie $H = (H_n)_{n=1, \dots, N}$

definiere den Entnahmeprozeß $\delta(H) = (\delta_n(H))_{n=1, \dots, N-1}$

durch $\delta_n(H) = \langle H(n), S(n) \rangle - \langle H(n+1), S(n) \rangle$.

Positive Entnahmen können interpretiert werden als Ausschüttungen, die ein Investor durch Ausüben von H konsumieren kann. Negative Entnahmen sind als Kapitalzuflüsse von außen zu interpretieren, die ein Investor vornehmen muss, um eine Handelsstrategie H beibehalten zu können.

30.11.2009



$(S(n))_{n=0,\dots,N}, (H(n))_{n=1,\dots,N}$

- Wertprozeß

Zu einer Handelsstrategie H ist der Wertprozeß $V(H) = (V_n(H))_{n=0,\dots,N}$ definiert durch

- $$V_n(H) = \begin{cases} \langle H(1), S(0) \rangle & n = 0 \\ \langle H(n), S(n) \rangle & n \geq 1 \end{cases}$$

$V_0(H) = \langle H(1), S(0) \rangle$ ist das zur Bildung der Handelsstrategie nötige Anfangskapital.

$V_n(H) = \langle H(n), S(n) \rangle$ ist der Wert der Handelsstrategie nach n -Perioden vor der Umschichtung des Portfolios $n = 1, \dots, N$.

4.2 Selbstfinanzierung

Eine Handelsstrategie heißt selbstfinanzierend wenn $\delta_n(H) = 0$ für alle $n = 1, \dots, N-1$

Nach Bildung des Anfangsportfolios wird zur Umschichtung zu den Handelszeitpunkten $n = 1, \dots, N-1$ kein Kapital hinzugefügt bzw entnommen.

$$\delta_n(H) = 0 \Leftrightarrow \langle H(n), S(n) \rangle = \langle H(n+1), S(n) \rangle$$

Folgende Aussagen sind äquivalent: $(\Delta S(k) = S(k) - S(k-1))$

- (i) H ist selbstfinanzierend

- (ii)
$$V_n(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle H(k), \Delta S(k) \rangle}_{\text{Periodengewinn in der } k\text{-ten Periode}} \quad \text{für alle } n = 1, \dots, N$$

$$(iii) \quad V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle \text{ für alle } n = 1, \dots, N$$

Hierbei bezeichnet:

$$V^*(H) = B(n)V_n(H), n = 0, \dots, N$$

den abdiskontierten Wertprozeß und

$$S^*(n) = B(n)S(n), n = 0, \dots, N$$

den abdiskontierten Preisprozeß.

Weiter bezeichnet für einen stochastischen Prozeß $(X(n))_{n \in N_0} : \Delta X(n) = X(n) - X(n-1), n = 1, 2, \dots$ den Prozeß der Zuwächse in X .

Beweis:

$$(ii) \Leftrightarrow \Delta V_k(H) = \langle H(k), \Delta S(k) \rangle \text{ für alle } k = 2, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \langle H(k), S(k) \rangle - \langle H(k-1), S(k-1) \rangle = \langle H(k), S(k) - S(k-1) \rangle \text{ für alle } k = 2, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \langle H(k), S(k-1) \rangle = \langle H(k-1), S(k-1) \rangle \text{ für alle } k = 2, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \langle H(l+1), S(l) \rangle = \langle H(l), S(l) \rangle, \text{ für alle } l = 1, \dots, N-1$$

$$\Leftrightarrow H \text{ ist selbstfinanzierend}$$

(iii) ist erfüllt

$$\Leftrightarrow \Delta V_k^*(H) = \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle \text{ für alle } k = 2, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow B(k) \langle H(k), S(k) \rangle - B(k-1) \langle H(k-1), S(k-1) \rangle = \langle H(k), B(k)S(k) \rangle - \langle H(k), B(k-1)S(k-1) \rangle$$

$$\Leftrightarrow B(k-1) \langle H(k), S(k-1) \rangle = B(k-1) \langle H(k-1), S(k-1) \rangle \text{ für alle } k = 2, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \langle H(l+1), S(l) \rangle = \langle H(l), S(l) \rangle, l = 1, \dots, N-1$$

$$\Leftrightarrow H \text{ ist selbstfinanzierend}$$

Man beachte, daß in (iii) die Wertentwicklung $(V_n^*(H))_{n=0, \dots, N}$ nicht von den Anteilen $(H_1(n))_{n=1, \dots, N}$ in der risikofreien Anlage abhängt, da $V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle$ und $\Delta S^*(k) = 0, k = 1, \dots, N$

Die Funktion von $(H_1(n))_{n=1, \dots, N}$ besteht darin, die Handelsstrategie selbstfinanzierend zu machen.

4.3 Bemerkung

Für jeden vorhersehbaren Prozeß $(H_2, \dots, H_d)$ und jedes Anfangskapital $V_0 \in R$ existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozeß H_1 , derart, daß $\langle H(1), S(n) \rangle = V_0$ und $H = (H_1, \dots, H_d)$ selbstfinanzierend ist und für den abdiskontierten Wertprozeß gilt:

$$V_n^*(H) = V_0 + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle$$

Beweis:

$$\text{Aus } V_0 = \langle H(1), S(0) \rangle = H_1(1) + \sum_{i=2}^d H_i(1)S_i(0)$$

Setze $H_1(1) = V_0 - \sum_{i=2}^d H_i(1)S_i(0)$

Dann gilt: $V_0 = \langle H(1), S(0) \rangle$

Aus $V_0 = \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle = V_n^*(H) = \sum_{i=2}^d H_i(n)S_i^*(n) + H_1(n)$, da $S_1^*(n) = 1$

erhält man:

$$\begin{aligned} V_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle + \sum_{i=2}^d H_i(n)S_i^*(n) - \sum_{i=2}^d H_i(n)S_i^*(n-1) \\ = \sum_{i=2}^d H_i(n)S_i^*(n) + H_1(n) \end{aligned}$$

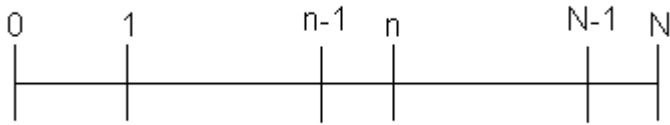
Setze also:

$$H_1(n) = V_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle - \sum_{i=2}^d H_i(n)S_i^*(n-1). \text{ Damit ist } (H_1(n))_{n \in N} \text{ ein}$$

vorhersehbarer Prozeß und $V_n^*(H)$ erfüllt $V_n^*(H) = V_0 + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle =$

$$V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle, n = 1, \dots, N$$

4.4 Arbitrage



$X : \Omega \rightarrow R^d$ ist ein Einperioden-Arbitrage in der n -ten Periode, falls gilt:

- (i) X ist $\mathcal{F}_{n-1}$ -meßbar
- (ii) $\langle X, S(n-1) \rangle \leq 0, \langle X, S(n) \rangle \geq 0, P(X; \Delta S(n)) > 0$

Eine Handelsstrategie H heißt Handelsarbitrage, falls $V_0(H) \leq 0$ und $\delta_n(H) \geq 0$ für alle $n = 1, \dots, N-1$ und $V_N(H) \geq 0$ und eine der Ungleichungen ist strikt auf Menge von positiver Wahrscheinlichkeit.

4.5 Satz

4.5.1 1.Fassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es existiert ein einperioden Arbitrage

(ii) Es existiert ein Handelsarbitrage

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei X ein Einperioden Arbitrage in der n -ten Periode, d.h. X ist $\mathcal{F}_{n-1}$ -meßbar $\langle X, S(n-1) \rangle \leq 0, \langle X, S(n) \rangle \geq 0, \langle X, \Delta S(n) \rangle > 0$

Definiere eine Handelsstrategie

H = Halten von X in der n -ten Periode durch $H(k) = 0, k = 1, \dots, n-1$

$H(n) = X$

$H(k) = 0, k = n+1, \dots, N$

$n=1$: $V_0(H) = \langle H(1), S(0) \rangle = \langle X, S(0) \rangle \leq 0$

$\delta_1(H) = \langle H(1), S(1) \rangle - \langle H(2), S(1) \rangle = \langle X, S(1) \rangle \geq 0$ und eine der Ungleichungen ist strikt.

$\delta_k(H) = 0$ für $k = 2, \dots, N-1, V_N(H) = 0$

Also H ein Handelsstrategie, $n = 2, \dots, N-1$

$V_0(H) = \langle H(1), S(0) \rangle = 0, \delta_1(H) = 0, \dots, \delta_{n-2}(H) = 0$

$\delta_{n-1}(H) = \langle H(n-1), S(n-1) \rangle - \langle H(n), S(n-1) \rangle = -\langle X, S(n-1) \rangle \geq 0$

$\delta_n(H) = \langle H(n), S(n) \rangle - \langle H(n+1), S(n) \rangle = \langle X, S(n) \rangle - 0 \geq 0$

eine der Ungleichungen ist strikt mit positiver Wahrscheinlichkeit.

Also ist H ein Handelsarbitrage $n = N$ analog.

03.12.2009

4.5.2 2.Fassung

(i) Es existiert ein Einperioden-Arbitrage

(ii) Es existiert ein Handelsarbitrage

Beweis:

1. (i) $\Rightarrow$ (ii) klar

2. (ii) $\Rightarrow$ (i) Induktion über die Anzahl der Perioden

Bis $N = 1$ stimmen beide Begriffe überein.

$N \rightarrow N+1$

Sei $(H(n))_{n=1, \dots, N+1}$ ein Handelsarbitrage

1. Fall: $\langle H(N), S(N) \rangle > 0$

Dann ist $(K(n))_{n=1, \dots, N} := (H(n))_{n=1, \dots, N}$ ein Handelsarbitrage für $(S(n))_{n=0, \dots, N}$,
dann $V_0(H) = V_0(K) \leq 0$, $\delta_n(H) = \delta_n(K) \geq 0$ für $n = 1, \dots, N-1$

$V_N(H) = \langle H(N), S(N) \rangle > 0$

Also existiert gemäß Induktionsvoraussetzung ein Einperioden-Arbitrage

2. Fall: $P(\langle H(N), S(N) \rangle < 0) > 0$

Setze $A = \{\langle H(N), S(N) \rangle < 0\} \in \mathcal{F}_N$

Konstruiere einen Einperioden-Arbitrage für die $(N+1)$ -te Periode durch

$X = H(N+1)\mathbb{1}_A$

Damit ist X $\mathcal{F}_N$ -meßbar mit

$\langle X, S(N) \rangle = \langle H(N+1), S(N) \rangle \mathbb{1}_A$

$\delta_N(H) \geq 0 \rightarrow \langle H(N), S(N) \rangle \mathbb{1}_A < 0$

und $\langle X, S(N+1) \rangle = \langle H(N+1), S(N+1) \rangle = V_{N+1}(H) \geq 0$, weil H
Handelsarbitrage

3. Fall: $\langle H(N), S(N) \rangle = 0$ P-fast sicher

Dann folgt:

$\langle H(N+1), S(N) \rangle \leq \langle H(N), S(N) \rangle = 0$ und

$\langle H(N+1), S(N+1) \rangle = V_{N+1}(H) \geq 0$

Falls $\langle H(N+1), S(N+1) \rangle = 0$

ist $(H(n))_{n \in N}$ ein Handelsarbitrage und damit existiert nach Induktions-
voraussetzung ein Einperioden-Arbitrage.

Falls $\langle H(N+1), S(N+1) \rangle > 0$, so ist $H(N+1) = X$ ein Einperioden-
arbitrage in der $(N+1)$ -ten Periode.

4.6 Das Core Ross Rubinstein Modell

2 Finanzgüter

- risikofreie Anlage mit Preisprozeß $(1+\rho)^n, n = 0, \dots, N, B(n) = \frac{1}{1+\rho}^n$

$\rho > 0$ deterministischer Zinssatz

- risikobehaftetes Finanzgut

mit Preisprozeß $A(n) = A(0) \prod_{i=1}^n Y_i$ (Y_i) $_{i=1, \dots, N}$ iid, $P(Y_i = n) = p = 1 - P(Y_i = d)$

$0 < d < u, A(0) < 0$

$F_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \sigma(A_1, \dots, A_n)$

$(A_n)_{n=0, \dots, N}$ ein geometrischer Random Walk über N -Perioden

Modell ist arbitragefrei $\Leftrightarrow d < 1 + \rho < u$

4.7 Claim und Hedge

Ein Claim C ist ein Kontrakt der seinem Inhaber am Ende der n -ten Periode die zufällige Auszahlung $C(n)$ zusichert für $n = 1, \dots, N$.

Ist $C(n) \geq 0$, so erhält der Inhaber den Betrag $C(n)$ am Ende der n -ten Periode vom Verkäufer.

Ist $C(n) \leq 0$, so muss der Inhaber den Betrag $|C(n)|$ an den Verkäufer zahlen.

Ein Claim C entspricht also einem reellwertigen adaptierten stochastischen Prozeß $(C(n))_{n=1, \dots, N}$

C heißt hedgebar, wenn es eine Handelsstrategie H gibt mit $\delta_n(H) = C(n)$ für alle $n = 1, \dots, N - 1$ und $V_N(H) = C(N)$.

Sicht des Verkäufers des Claims:

Durch den Hedge kann der Verkäufer die Verpflichtung aus dem Claim erfüllen. Als Anfangspreis für den Claim wird der Verkäufer mindestens $\langle H(1), S(0) \rangle$, das Anfangskapital des Hedge, verlangen.

Sicht des Käufers:

Durch den Hedge erhält der Käufer den gleiche Auszahlungsprozeß, wie durch den Claim. Deshalb wird er keinen Anfangspreis für den Claim oberhalb von $\langle H(1), S(0) \rangle$ akzeptieren.

Also ist $\langle H(1), S(0) \rangle$ der Anfangswert des Hedges der eindeutig bestimmte arbitragefreie Anfangspreis für den Claim.

Bewertung des Claims nach n Perioden nach Auszahlung von $C(n)$.

Hier kann eine analoge Argumentation durchgeführt werden.

$\langle H(n+1), S(n) \rangle$ gibt dann den Wert des Hedges an, die die Verpflichtung $C(n+1), \dots, C(N)$ absichert.

Also wird der Claim zur Zeitpunkt n durch $\langle H(n+1), S(n) \rangle$ bewertet.

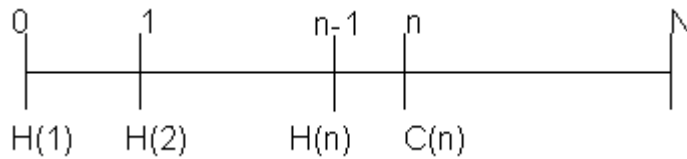


dies entspricht N Kontrakten mit Auszahlung $C^{(n)} = (0, \dots, 0, C(n), 0, \dots, 0)$

4.8 Satz

Gegeben sei ein arbitragefreies N -Perioden Modell. Sei C ein Claim der Form $C = (0, \dots, 0, C(n), 0, \dots, 0)$ mit $1 \leq n \leq N$ also $C(k) = 0$ für $k \neq n$. Sei H ein Hedge für C .

Dann sind für das um den Handel mit C erweiterte Modell $\tilde{S}(k) = \begin{pmatrix} S(k) \\ P_k(C) \end{pmatrix}$



$$V_0(H) = \langle H(1), S(0) \rangle$$

$$\delta_k(H) = \langle H(k), S(k) \rangle - \langle H(k+1), S(k+1) \rangle = 0$$

$$\delta_n(H) = \langle H(n), S(n) \rangle - \langle H(n+1), S(n) \rangle = C(n)$$

$$\delta_{n+1}(H) = 0 = \langle H(n+1), S(n+1) \rangle - \langle H(n+2), S(n+1) \rangle$$

..

$$\delta_{N-1}(H) = 0 = \langle H(N-1), S(N-1) \rangle - \langle H(N), S(N-1) \rangle$$

$$\delta_N(H) = 0 = \langle H(N), S(N) \rangle$$

$$\tilde{S}(n) = \begin{pmatrix} S(n) \\ C(n) \end{pmatrix}$$

äquivalent:

(i) das erweiterte Modell ist arbitragefrei

(ii) $P_k(C) = V_k(H) = \langle H(k), S(k) \rangle$ für $0 \leq k \leq n-1$

Man beachte, daß in dem erweiterten Modell nur über n-Perioden gehandelt wird.

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i) per Kontraposition

Also existiert ein Einperioden Arbitrage in einer Periode k_0 mit $1 \leq k_0 \leq n$. Also gibt

es ein F_{k_0-1} -meßbares $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ mit $\langle \tilde{X}, \tilde{S}(k_0-1) \rangle = \langle X, S(k_0-1) \rangle + Y P_{k_0-1}(C) \leq$

C und $\langle \tilde{X}, \tilde{S}(k_0) \rangle = \langle X, S(k_0) \rangle + Y P_{k_0}(C) \geq 0$

und eine Ungleichung ist strikt auf einer Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit.

Annahme: $P_k(C) = V_k(H) = \langle H(k), S(k) \rangle$ für alle $k = 0, \dots, n-1$

Dann gilt:

$$\langle \tilde{X}, \tilde{S}(k_0-1) \rangle = \langle X, S(k_0-1) \rangle + Y \langle H(k_0-1), S(k_0-1) \rangle \stackrel{\text{Selbstfinanzierung}}{=} \langle X, S(k_0-1) \rangle + Y \langle H(k_0), S(k_0) \rangle = \langle X + YH(k_0), S(k_0-1) \rangle \leq 0$$

und weiter:

$$\langle X, \tilde{S}(k_0) \rangle = \langle X + YH(k_0), S(k_0) \rangle \geq 0$$

Also ist:

$X + YH(k_0)$ ein Einperioden-Arbitrage im Ausgangsmodell.

Widerspruch.

07.12.2009

$$C = (0, \dots, 0, C(n), 0, \dots, 0)$$

H Hedge für C: erweiterte Modell:

$$\tilde{S}(k) = \begin{pmatrix} S(k) \\ P_k(C) \end{pmatrix}, k = 0, \dots, n-1$$

$$\tilde{S}(n) = \begin{pmatrix} S(n) \\ C(n) \end{pmatrix}, P_n(C) = C(n)$$

Äquivalenz:

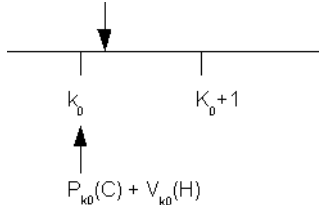
(i) das erweiterte Modell ist arbitragefrei

(ii) $P_k(C) = V_k(H) = \langle H(k), S(k) \rangle$, für alle $k = 0, \dots, n-1$

(i) $\Rightarrow$ (ii) per Kontraposition

Es gilt somit in $k_0 < n$ mit $P_{k_0}(C) > V_{k_0}(H)$.

Wähle das maximale k_0 aus



Konstruiere folgendes Einperioden-Arbitrage durch:

$$\text{Setze: } X = \begin{pmatrix} -H(k_0 + 1) \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{P_{k_0}(C) < V_{k_0}(H)} + \begin{pmatrix} -H(k_0 + 1) \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{P_{k_0}(C) > V_{k_0}(H)}.$$

$$\text{Dann ist } X \mathcal{F}_{k_0}\text{-meßbar und } \langle X, \tilde{S}(k_0) \rangle = (P_{k_0}(C) - \underbrace{\langle H(k_0 + 1), S(k_0) \rangle}_{\Rightarrow \langle H(k_0), S(k_0) \rangle = V_{k_0}(H)}) \mathbb{1}_{P_{k_0}(C) < V_{k_0}(H)} +$$

$$(\langle H(k_0 + 1), S(k_0) \rangle - P_{k_0}(C)) \mathbb{1}_{P_{k_0}(C) > V_{k_0}(H)} < 0$$

$$\text{und } \langle X, \tilde{S}(k_0 + 1) \rangle = (P_{k_0+1}(C) - \langle H(k_0 + 1), S(k_0 + 1) \rangle) \mathbb{1}_{P_{k_0}(C) < V_{k_0}(H)} + (\langle H(k_0 + 1), S(k_0 + 1) \rangle -$$

$$P_{k_0+1}(C)) \mathbb{1}_{P_{k_0}(C) > V_{k_0}(H)} = V_{k_0+1}(H) \stackrel{k_0 \text{ maximal}}{=} P_{k_0+1}(C) = 0$$

Also ist X ein Einperioden-Arbitrage.

4.8.1 Einschub: Bewertung von Barriereoptionen

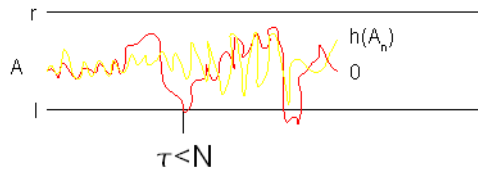
Gegeben sei ein N-Perioden Modell mit einem Preisprozeß $A(n)$, $n = 0, \dots, N$ für ein risikobehaftetes Finanzgut. Eine Barriereoption wird bestimmt durch

- Barrieren l, r sowie
- einer Auszahlungsfunktion h .

Der Inhaber erhält als Auszahlung am Ende der Laufzeit:

$$C = h(A_N) \mathbb{1}_{l \leq \min_k A_k, \max_k A_k \leq r}$$

Setzt man die Stopzeit τ durch $\tau = \inf\{n \in N_0 : A_n < k \text{ oder } A_n > r\}$ so ist $X = h(A_N)1_{\tau > n}$



Bzügl. eines äquivalenten Martingalmaßes p^* und einem deterministischen Diskontierungsprozeß $B(n) = \frac{1}{1+\rho}^n, n = 0, \dots, N$

$E^*(\frac{1}{1+\rho}^N C | A(0) = x)$ berechnet werden.

Wir setzen voraus, daß $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette ist bezügl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Aus der einfach Markov-Eigenschaft, (Siehe Definition Markovprozeß), kann man folgern, daß die Zukunft des Prozesses von der Vergangenheit nur über die Gegenwart abhängt. Dies bedeutet $p^*((A(n+k))_{k \in \mathbb{N}_0} \in B | \mathcal{F}_n) \stackrel{\text{Markoveigenschaft}}{=} P^*((A(n+k))_{k \in \mathbb{N}_0} \in B | A(n)) = P^*(A(k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in B | A(0) = \cdot) \cdot A(n), B \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}_0}$

$P((A(n+k))_{k \in \mathbb{N}_0} \in B | A(n) = x) = P^*((A(k))_{k \in \mathbb{N}_0} \in B | A(0) = x)$

oder äquivalent ausgedrückt:

$E^*(f((A_{n+k})_{k \in \mathbb{N}_0}) | \mathcal{F}_n) = E^*(f((A_{n+k})_{k \in \mathbb{N}_0}) | A_n) = E^*(f((A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}) | A_0 = \cdot) \cdot A_n$, für jede Funktion $f : \mathcal{L}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow R$ mit existierendem $E^*f((A_{n+k})_{k \in \mathbb{N}_0})$.

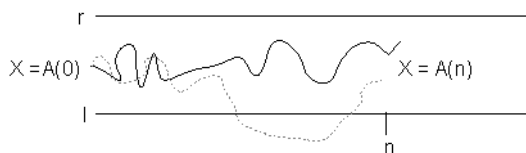
Dies wird jetzt benutzt zur Berechnung von $E^*(C | \mathcal{F}_n) = E^*(h(A_N)1_{\tau > N} | \mathcal{F}_n)$ dann

$E^*(h(A_N)1_{\tau > N} | \mathcal{F}_n) = E^*(h(A_N)1_{\tau > n}1_{\tau > N} | \mathcal{F}_n) = E^*(h(A_N)1_{\tau > n}1_{\max_{k=n+1}^N A(k) \leq l} | \mathcal{F}_n)$

$= [\tau > n \in \mathcal{F}_n] 1_{\tau > n} E^*(h(A_N)1_{\max_{k=n+1}^N A(k) \leq l} | A_n)$

$= 1_{\tau > n} E^*(h(A_{N-n}) \max_{k=1}^{N-n} A_k \leq l, \min_{k=1}^{N-n} A_k \geq l | A_0 = \cdot) \cdot A(n)$

$1_{\tau > n} E^*(h(A_{N-n})1_{\tau > N-n} | A_0 = \cdot) \cdot A(n)$



$E^*(C | \mathcal{F}_n) = 0$ auf $\tau \leq n$

Setzte man also

$W(N, x) = E^*(C | A(0) = x)$. so erhält man $E^*(C | \mathcal{F}_n) = [M.E.]1_{\tau > n} w(N - n, A(n))$

für alle $n \in \mathbb{N}$

und damit für den Preis:

$v(N, x) = E^*((\frac{1}{1+\rho})^N C | A(0) = x) = \frac{1}{1+\rho}^N w(N, x)$.

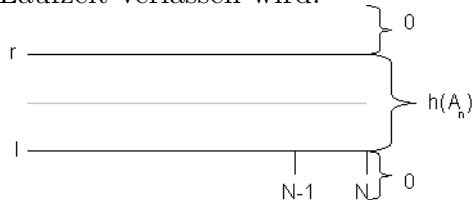
Die Gleichung : $v(N, x) = E^*E^*(\frac{1}{1+\rho}^N C | \mathcal{F}_n) = E^*\frac{1}{1+\rho}^N 1_{\tau > n} w(N - n, A(n)) = E^*(\frac{1}{1+\rho}^n 1_{\tau > n} v(N - n, A(n))$.

Wendet man das an für $n = 1$, erhält man folgende Rekursionsgleichung im CRR-Modell

$v(N, x) = \frac{1}{1+\rho} * (v(N-1, xu)p + v(N-1, xd)(1-p))$ für alle $l \leq x \leq r$, $v(N, x) = 0$ für $x < l$ und $x > r$.

Digitale Barriereoption

Hier erhält man eine Auszahlung von 1 am Ende, wenn die Barriere innerhalb der Laufzeit verlassen wird.



d.h. $C = 1_{\tau \leq N} = \mathbb{1}_{\max_{k=0}^N A_k > r \text{ oder } \min_{k=0}^N A_k < l}$
 $P^*(\tau \leq N | A(0) = x) = 1$ für $x \notin [l, r]$, da $\tau = 0$.

Für $l \leq x \leq r$ gilt:

$P^*(\tau \leq N | A(0) = x) = P^*(\tau \geq 1, \tau \leq N | A(0) = x) = P^*(\tau \geq 1, \max_{k=1}^N A_k > r \text{ oder } \min_{k=1}^N A_k < l | F_1)$

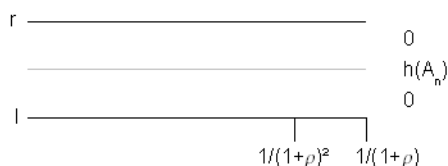
$\stackrel{M.E.}{=} E^* 1_{\tau \geq 1} P^*(\max_{k=1}^N A_k > r \text{ oder } \min_{k=1}^N A_k < l | A(0) = \cdot) = A(1)$

für den Preis:

$v(N, x) = E^*(\frac{1}{1+\rho} C | A(0) = x)$

$= \frac{1}{1+\rho} P^*(\tau \leq N | A(0) = x)$ erhält man also folgende Rekursionsgleichung. $v(N, x) = E^* 1_{\tau \geq 1} v(N-1, A(1)) \frac{1}{1+\rho}$

$= \frac{1}{1+\rho} (v(N-1, xu)p^* + (1-p^*)v(N-1, dx))$, für $l \leq x \leq r$ und $v(N, x) = \frac{1}{1+\rho}^N$ für $x < l$ oder $x > r$



10.12.2009

4.9 Äquivalentes Martingalmaß

Bislang: Bewertung durch den Wertprozeß des Hedge

Problem: Bestimmung des Hedge

Definition: Ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^* heißt äquivalentes Martingalmaß oder auch risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn der abdiskontierte Preisprozeß eines jeden Finanzgutes ein Martingal bzgl. P^* ist. D.h. $(B(n)S_k(n))_{n=0, \dots, N}$ ist ein Martingal bzgl. P^* für alle $1 \leq k \leq d$

4.10 Martingaleigenschaft von selbstfinanzierenden Handelsstrategien diskreter stochastischer Analysis

Jeder diskrete R^d -wertige adaptierte Prozeß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kann als Semimartingal aufgefasst werden.

Ist H ein previsible R^d -wertiger Prozeß, so ist das stochastische Integral von H bzgl. X definiert durch $(H \cdot X)(n) = \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta X(k) \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$(H \cdot X)(0) = 0.$$

$$\langle H(k), \Delta X(k) \rangle = \text{Gewinn in der } k\text{-ten Periode}$$

Ist X ein Martingal, H previsible mit $E|\langle H(k), \Delta X(k) \rangle| < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $H \cdot X$ ein Martingal, denn $E((H \cdot X)(n) | \mathcal{F}_{n-1}) = E((H \cdot X)(n-1) + \langle H(n), \Delta X(n) \rangle | \mathcal{F}_{n-1}) =$

$$(H \cdot X)(n-1) + E\left(\sum_{i=1}^d H_i(n) \Delta X_i(n) | \mathcal{F}_{n-1}\right) = (H \cdot X)(n-1) + \sum_{i=1}^d E(H_i(n) \Delta X_i(n) | \mathcal{F}_{n-1})$$

$$\underbrace{H_i(n) \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1}\text{-meßbar}}_{\text{}} (H \cdot X)(n-1) + \sum_{i=1}^d H_i(n) \underbrace{E(X_i(n) - X_i(n-1) | \mathcal{F}_{n-1})}_{E(X(n) | \mathcal{F}_{n-1}) - X(n-1) = 0} = (H \cdot$$

$$X)(n-1)$$

was die Martingaleigenschaft impliziert.

Insbesondere ist für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit

$$E^*|\langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle| < \infty \text{ für alle } k = 1, \dots, N$$

$$\text{der abdiskontierte Wertprozeß ein } P^*\text{-Martingal denn } V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle = V_0(H) + (H \cdot S^*)(n)$$

Dies kann zur Bewertung von hedgebaren Claims genutzt werden.

4.11 Bewertung mittels P^*

In einem arbitragefreien Finanzmarktmodell über N Perioden sei

$C = (0, \dots, 0, C(n), 0, \dots, 0)$ ein hedgebarer Claim mit Hedge H .

Sei P^* ein äquivalentes Martingalmaß mit: $E^*|B(n)C(n)| < \infty$

Dann sind für das um den Handel mit C erweiterte Modell:

$$\tilde{S}(k) = \begin{pmatrix} S(k) \\ P_k(C) \end{pmatrix}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\tilde{S}(n) = \begin{pmatrix} S(n) \\ C(n) \end{pmatrix} \text{ äquivalent:}$$

(i) das erweiterte Modell ist arbitragefrei.

(ii) $B(k)P_k(C) = E^*(B(n)C(n) | \mathcal{F}_k), \quad k = 0, \dots, n-1$

Beweis:

Sei H ein Hedge für C . Dann gilt: $V_n(H) = C(n)$ und H ist selbstfinanzierend bis $n - 1$. Wegen (4.9):

(i) $\Leftrightarrow P_k(C) = V_k(H)$ für alle $0 \leq k \leq n - 1$.

Dann ist $V_k^*(H)$, $k = 0, \dots, n$ ein P^* -Martingal ist, folgt $B(k)P_k(C) = B_k V_k(H) + V_k^*(C) \stackrel{\text{M.E.}}{=} E^*(V_n^*(H) | \mathcal{F}_k) = E^*(B_n C(n) | \mathcal{F}_k)$.

4.12 Vollständigkeit

Ein Mehr-Perioden Modell heißt vollständig, wenn jeder Claim hedgebar ist.

4.13 CRR-Modell

Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes

Gegeben sei ein CRR-Modell gemäß $A(n) = A(0) \prod_{i=1}^n Y_i$, $P(Y_i = u) = p = 1 - P(Y_i = d)$ die Aufwärtssprungwahrscheinlichkeit p ist der Parameter des Modells.

Frage: Für welches p liegt Risikoneutralität vor:

$(A(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein geometrischer Random Walk. $A^*(n) = \frac{1}{1+\rho} A(n) = A_0 \prod_{i=1}^n \frac{Y_i}{1+\rho}$ ist auch ein geometrischer Random Walk.

also $(A^*(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Martingal $\Leftrightarrow E \frac{Y_1}{1+\rho} = 1$

$$\Leftrightarrow pu + (1-p)d = 1 + \rho$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1+\rho-d}{u-d}$$

Ein CRR-Modell ist risikoneutral beim ausgezeichneten Parameter $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$.

Frage: Wie kann durch ein Wechsel des Maßes ein CRR-Modell mit Parameter p in ein CRR-Modell mit Parameter p^* überführt werden.

Setze $z_n = |i \leq n : Y_i = u|$ Anzahl der Aufwärtssprünge in der ersten Periode =

$$\sum_{i=1}^n 1_{Y_i=u}$$

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Random Walk.

Setze $L = \left(\frac{p^*}{1-p^*} \frac{1-p}{p}\right)^N \frac{1-p^*}{1-p} = a^{Z_n} \frac{1-p^*}{1-p}$ mit $a = \frac{p^*}{1-p^*} \frac{1-p}{p}$

Dann ist $L > 0$ und da $(a^{Z_n})_{n=1, \dots, N}$ ein geometrischer Random Walk gilt:

$$\begin{aligned} E_p L &= \frac{1-p^*}{1-p} E_p a^{Z_n} \stackrel{\text{gem. RW}}{=} \frac{1-p^*}{1-p} (E_p a^{Z_1})^N \\ &= \frac{1-p^*}{1-p} = (ap + 1(1-p))^N = 1 \end{aligned}$$

Also definiert L die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes p^* auf $F_N = \sigma(Y_1, \dots, Y_N)$.

Es gilt also: $P^*(A) = \int_A L dP = E a^{Z_N} \frac{1-p^*}{1-p} \mathbf{1}_A$ für alle $A \in \mathcal{F}_N$.

Behauptung:

$Y_1, \dots, Y_N$ sind iid. bzgl. P^* mit $P^*(Y_i = u) = p^*$ für alle $i = 1, \dots, N$

Damit liegt dann ein CRR-Modell mit Parameter p^* zgl. P^* vor.

Beweis:

Allgemein gilt für $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$

$$\frac{dP^*}{dP}|_{\mathcal{F}_n} = L_n = E(L|\mathcal{F}_n) = a^{Z_n} \frac{1-p^*}{1-p}$$

$$\text{Also gilt } P^*(Y_1 = u) = \int_{Y_1=u} L_1 dP = a^{\frac{1-p^*}{1-p}} P(Y_1 = u) = \frac{P^*}{1-p^*} \frac{1-p}{p} \frac{1-p^*}{1-p} p = p^*$$

Entsprechend:

$$P^*(Y_1 = d) = 1 - p^*$$

Für $B \in \mathcal{F}_n$ gilt:

$$\begin{aligned} P^*(Y_{n+1} = u \cap B) &= \int_{B \cap Y_{n+1}=u} L_{n+1} dP \\ &= \int_{B \cap Y_{n+1}=u} \frac{L_{n+1}}{L_n} L_n dP \\ &= a * \frac{1-p^*}{1-p} \int_{B \cap Y_{n+1}=u} L_n dP \\ &= a^{\frac{1-p^*}{1-p}} E\left(\underbrace{L_n 1_B}_{F_n\text{-meßbar}}\right) 1_{Y_n=u} = a^{\frac{1-p^*}{1-p}} \underbrace{E L_n 1_B}_{P^*(B)} \underbrace{P(Y_{n+1}=u)}_{=P} \\ &= P^*(B) u^{\frac{1-p^*}{1-p}} p = P^*(B) p^* \end{aligned}$$

Ebenso erhält man:

$$P^*(Y_{n+1} = d \cap B) = (1 - p^*) P^*(B)$$

Hieraus folgt, daß Y_{n+1} stochastisch unabhängig ist bzgl. P^* von $\mathcal{F}_n$ mit $P(Y_{n+1} = u) = p^* = 1 - P^*(Y_{n+1} = d)$.

14.12.2009

4.14 Vollständigkeit des CRR-Modells

Satz: Das CRR-Modell ist vollständig.

Beweis für $N = 2$:

Sei C ein Claim der Form:

$$C = (0, C(2)) \text{ oder } C = (C(1), 0)$$

Für $C = (c(1), 0)$ ist im Einperioden-Modell ein Hedge bestimmt worden.

Sei $C = (0, C(2))$

$$\text{mit } C(2) = \begin{cases} c_{uu} & \text{falls } A(1) = uA(0), A(2) = uA(1) \\ C_{ud} & A(1) = uA(0), A(2) = dA(1) \\ C_{du} & A(1) = dA(0), A(2) = uA(1) \\ C_{dd} & A(1) = dA(0), A(2) = dA(1) \end{cases}$$

Rückwärtsberechnung des Hedges:

Auf dem Ereignis $A(1) = uA(0)$ muß das Portfolio $H(2) = \begin{pmatrix} h_1(2)(u) \\ h_2(2)(u) \end{pmatrix}$ so gebildet

werden, daß $\left\langle H(2), \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 \\ u^2 A(0) \end{pmatrix} \right\rangle = C_{uu}$

$$\left\langle H(2), \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 \\ udA(0) \end{pmatrix} \right\rangle = C_{ud}$$

Dies führt zu Gleichungen

$$h_1(2)(1+\rho)^2 + h_2(2)(u)u^2A_0 = C_{uu}$$

$$h_1(2)(u)(1+\rho)^2 + h_2(2)(u)udA_0 = C_{ud}$$

$$\text{Also } h_1(2)(u) = \frac{1}{(1+\rho)^2} \frac{uC_{ud} - dC_{uu}}{u-d}$$

- Anleiheanteil nach Umschichtung, wenn der erste Sprung ein Aufwärtssprung gewesen ist

$$h_2(2)(u) = \frac{1}{uA_0} \frac{C_{uu} - C_{ud}}{u-d}$$

- entsprechender Aktienanteil

Der Wert des Portfolios $\begin{pmatrix} h_1(2)(u) \\ h_2(2)(u) \end{pmatrix}$ zum Zeitpunkt 1 ist $h_1(2)(u)(1+\rho) + h_2(2)(u)uA_0 =$

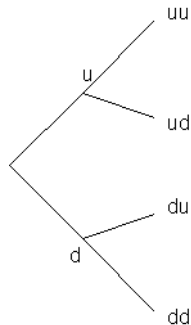
$$V_1(u) = \frac{1}{1+\rho} (p^* C_{uu} + (1-p^*) C_{ud})$$

Analog geht man vor auf dem Ereignis $Y_1 = d$. Man bestimmt das Portfolio $\begin{pmatrix} h_1(2)(d) \\ h_2(2)(d) \end{pmatrix}$

aus den entsprechenden Gleichungen und erhält $h_1(2)(d) = \frac{1}{(1+\rho)^2} \frac{uC_{dd} - dC_{du}}{u-d}$

$$h_2(2)(d) = \frac{1}{dA_0} \frac{C_{du} - C_{dd}}{u-d}$$

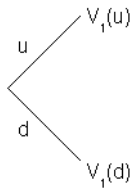
$$V_1(d) = h_1(2)(d)(1+\rho) + h_2(2)(d)dA_0 = \frac{1}{1+\rho} (p^* C_{du} + (1-p^*) C_{dd})$$



Die Handelsstrategie zum Zeitpunkt 1 ist also

$$H(2) = \begin{pmatrix} h_1(2)(Y_1) \\ h_2(2)(Y_1) \end{pmatrix} \text{ bestimmt werden.}$$

Der Wert $\langle H(2), (1+\rho, A(1)) \rangle$ nach einer Periode entspricht einem Claim, der durch ein Anfangsportfolio $H(1) = \begin{pmatrix} h_1(1) \\ h_2(1) \end{pmatrix}$ gehedgt werden muss.



Dies führt zu den Gleichungen:

$$h_1(1)(1 + \rho) + h_2(1)uA_0 = V_1(u)$$

$$h_1(1)(1 + \rho) + h_2(1)dA_0 = v_1(d)$$

$$\text{Also } h_1(1) = \frac{1}{1+\rho} \frac{uV_1(d) - dV_1(u)}{u-d}, h_2(1) = \frac{1}{A_0} \frac{V_1(u) - V_1(d)}{u-d}$$

Damit ist der Hedge $H(1), H(2)$ bestimmt und es gilt:

$$\delta_1(H) = 0, V_2(H) = \left\langle H(2), \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 \\ A(2) \end{pmatrix} \right\rangle = C(2)$$

Also ist H ein Hedge für C.

Es gilt:

$$P_0(C) = \langle H(1), S(0) \rangle = \left\langle H(1), \begin{pmatrix} 1 \\ A_0 \end{pmatrix} \right\rangle = h_1(1) + A_2(1)A_0 = \frac{1}{1+\rho}(p^*V_1(u) + (1 - p^*)V_1(d))$$

Der allgemeine Fall $N > 2$ beweist man per Induktion.

4.15 diskrete Black-Scholes-Formel

Gegeben sei ein N Perioden CRR-Modell mit $0 < d < 1 + \rho < u$

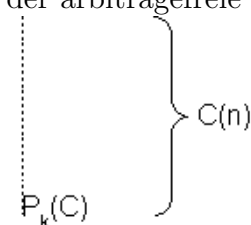
$$A(n) = A_0 \prod_{i=1}^n Y_i, n = 1, \dots, N$$

Calloption mit Laufzeit n und Basis K und entspricht dem Claim C mit $C(n) = (A(n) - K)^+, C(k) = 0$ für $k \neq n$.

Das CRR-Modell ist vollständig, also ist C hedgebar. Ferner existiert ein äquivalentes Martingalmaß P^* . Bzgl. P^* liegt ein CRR-Modell mit Parameter $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$ vor.

(4.11) liefert, daß $B(k)P_k(C) = E^*(B(n)(A(n) - K)^+ | F_k), k = 0, \dots, n$

der arbitragefreie Preisprozeß des Claims ist.



Bezeichne $C(x, n, K)$ den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit n, Basis K und Anfangsaktienpreis. Dann ist $c(A_0, n, K) = E^*(\frac{1}{1+\rho} (A_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} - K)^+)$

$$= \frac{1}{1+\rho} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (p^*) (1-p^*)^{n-i} (A_0 u^i d^{n-i} K)^+$$

, wobei $z_n = \sum_{k=1}^n A_{Y_k=n}$ die Aufwärtssprünge zählt.

Dies ist die diskrete Black-Scholes-Formel

Aus der Markoveigenschaft folgt: $P_k(C) = c(A_k, n-k, K)$.

Ziel: Arbitragefreiheit $\Rightarrow$ Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes

4.16 Satz

Sei $|\Omega| < \infty$. Gegeben sei ein N-Periodenmodell. Sei P^* äquivalent zu p mit $E^* V_n^*(H) = V_0(H)$ für alle selbstfinanzierenden H . Dann ist P^* ein äquivalentes Martingalmaß.

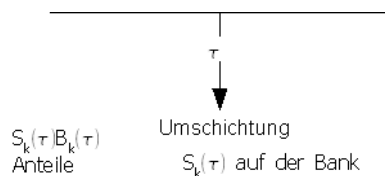
Beweis:

Sei $(S_k(n))_{n=0,\dots,N}$ der Preisprozeß des k-ten Finanzgutes.

Zeige $E^* B(\tau) S_k(\tau) = S_k(0)$ für alle Stopzeiten τ . Dann folgt mit (3.15) die Martingaleigenschaft von $(B(n) S_k(n))_{n=0,\dots,N}$

Zu einer Stopzeit τ betrachte Handelsstrategie H

- Halten des k-ten Finanzgutes bis τ
- Danach Anlage des Kapitals in die Risikofreie Anlage und halten bis zum Ende.



$$\beta(n) = \frac{1}{B(n)}, \frac{S_k(\tau)}{\beta(\tau)} = \text{Anteile im Bankkonto}$$

$$\text{Also } H(n+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} 1_{\tau > n} + \begin{pmatrix} S_k(\tau) B(\tau) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selbstfinanzierend, da eine Umschichtung nur am Ende der τ -Periode stattfindet und $\langle H(m+1), S(m) \rangle 1_{\tau=m} = S_k(m) B(m) \frac{1}{B(m)} 1_{\tau=m} = S_k(m) 1_{\tau=m} = \langle H(m), S(m) \rangle 1_{\tau=m}$ für $m = 1, \dots, N-1$

$$\text{Also gilt: } S_k(0) = \langle H(1), S(1) \rangle = V_0(H) = E^* V_N^*(H) = E^* B(H) V_N(H) \\ = E^* B(N) B(\tau) S_k(\tau) \frac{1}{B(N)} = E^* B(\tau) S_k(\tau)$$

4.17 Satz

Gegeben sei im arbitragefreien N-Perioden Modell mit $|\Omega| < \infty$. Dann gibt es ein äquivalentes Martingalmaß p^* .

Beweis: O.E.d.A: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ mit $P(\omega_i) > 0$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Sei $G = \{(H \cdot S^*)(N) : H \text{ selbstfinanzierend}\}$

$Y \in G \Leftrightarrow$ Es existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit $Y = (H \cdot S)^*(N) = V_N^*(H) - V_0(H)$

G ist ein endlich-dimensionaler Teilraum der Menge aller F_N -meßbaren Abbildungen. Sei $L^+ := \{Y : \Omega \rightarrow R : Y > 0\}$

L^+ = nichtnegative Zufallsvariablen

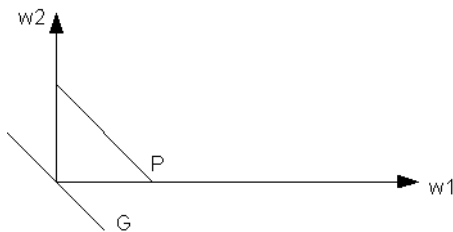
Arbitragefreiheit impliziert.

$G \cap L^+ = \{0\}$

Für $P^+ := \{p : \Omega \rightarrow [0, 1] | p(\omega_i) > 0, \sum_{i=1}^r p(\omega_i) = 1\}$ die zu P äquivalenten Wahr-

scheinlichkeitsmaße $P = \{p : \Omega \rightarrow [0, 1] | p(\omega_i) \geq 0, \sum_{i=1}^r p(\omega_i) = 1\}$

gilt $P^+ \cap G = \emptyset, P \cap G = \emptyset$



P ist kompakt und konvex Separationssatz liefert ein lineares Funktional $\phi : R^r \rightarrow R$ mit $\phi(Y) \leq 0$ für alle $Y \in G$

$\phi(P) > 0$ für alle $p \in P$.

Da G ein Teilraum ist, folgt $\phi(Y) = 0$ für alle $Y \in G$

Es existiert ein $\Pi \in R^r$ mit $\phi(Y) = \langle \Pi, Y \rangle = \sum_{i=1}^r \Pi_i Y_i = 0$ für alle $Y \in G$

$\phi(p) = \sum_{i=1}^r \Pi_i p(\omega_i) > 0$ für alle $p \in P$

Es gilt $\Pi_1 > 0, \dots, \Pi_r > 0$, denn für $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ gilt:

$0 < \langle \Pi, e_i \rangle = \sum_{j=1}^r \Pi_j e_i(\omega_j) = \Pi_i$ für alle $1 \leq i \leq r$

Normiere Π und setze $P^*(\omega_i) = \frac{\Pi_i}{\sum_{j=1}^r \Pi_j}, i = 1, \dots, r$

Dann ist $P^* \in P^+$ äquivalent zu P und

$E^*((H \cdot S)(N)) = 0$, da $(H \cdot S)(N) \in G$ für alle selbstfinanzierenden H .

Also folgt: $E^*V_N^*(H) = E^*(V_0(H) + (H \cdot \dots \cdot S^*)(N)) = V_0(H)$ für alle selbstfinanzierenden H . Dann ist P^* ein äquivalentes Martingalmaß wegen (4.16).

4.18 Satz

Gibt es in einem N -Perioden-Modell ein äquivalentes Martingalmaß P^* , so ist das Modell arbitragefrei.

Beweis: ist das Modell nicht arbitragefrei. Dann existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit $V_N^*(H) \geq V_0(H)$, $P(V_N^*(H) \geq V_0(H)) > 0$. Da $P^* \sim P$ gilt also $P^*(V_N^*(H) \geq V_0(H)) > 0$. Also $V_0(H) < P^*V_N^*(H) = V_0(H)$ Widerspruch zur Martingaleigenschaft von $V_n^*(H)$ bzgl. P^* .

Insgesamt ergibt sich das

4.19 No-Arbitrage-Theorem

(1. Fundamentalsatz der Preistheorie)

Ein in einem Mehrperiodenmodell sind äquivalent:

- (i) das Modell ist arbitragefrei
- (ii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß

Beachte:

Der Beweis ist für $|\Omega| < \infty$ geführt worden.

Für allgemeines Ω bleibt die Aussage wahr, allerdings sind die dazu notwendigen mathematischen Hilfsmittel schwieriger.

4.20 Charakterisierung der Vollständigkeit

(2. Fundamentalsatz der Preistheorie)

Wieder wird $|\Omega| < \infty$ vorausgesetzt, weiter wird ein arbitragefreies Finanzmarktmodell betrachtet.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Das Modell ist vollständig
- (ii) Es gibt genau ein äquivalentes Martingalmaß P^*

- (iii) Zu jedem P^* -Martingal $(M(n))_{n=0,\dots,N}$ gibt es einen previsible Prozeß $(H(k))_{k=n,\dots,N}$ mit $M(n) = M(0) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle, n = 1, \dots, N$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Seien P_1^*, P_2^* äquivalente Martingalmaße und $A \in \mathcal{F}_N$. Dann gibt es wegen der Vollständigkeit eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit $V_N(H) = 1_A B(N)$.

Also gilt:

$$P_1^* = E_1^*(V_N^*(H)) = V_0(H) = E_2^*(V_N^*(H)) = P_2(A)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): per Kontraposition:

Sei $\mathcal{H}^* = \{V^* : V^* \text{ ist } F_N\text{-meßbar und es gibt eine selbstfinanzierende Handelsstrategie } H \text{ mit } V_N^*(H) = V^*\}$

$\mathcal{H}^*$ = Menge der erreichbaren, abdiskontierten Endvermögen

Da das Modell nicht vollständig ist, ist dieser Raum $\mathcal{H}^*$ ein echter Teilraum von $L_2(\Omega, F_N, P^*), L_2(\Omega, F_N, P^*) = \mathcal{H}^* + (\mathcal{H}^*)^\perp$

1 Anteil im Bankkonto liefert das $\frac{1}{B(N)}$ zum Ende, also ist $1: \Omega \rightarrow R(\omega \rightarrow 1) \in \mathcal{H}^*$.

Wegen $|\Omega| < \infty$ existiert ein $L \in (\mathcal{H}^*)^\perp$ mit $|L(\omega)| < 1$ für alle $\omega \in \Omega$.

Also ist $1 + L > 0$ und $E^*(1 + L) = 1 + \underbrace{E^*L}_{=0} = 1$

da $1 \in \mathcal{H}^*$ und $(\mathcal{H}^*)^\perp$.

Also wird durch

$$\frac{dP_1^*}{dP^*} = 1 + L$$

ein zu P^* äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert mit $E^*V_N^*(H) = E^*V_N^*(H)(1 + L) = V_0(H) + \underbrace{E^*V_N^*(H)L}_{=0, da V_N^*(H) \in \mathcal{H}^*}$ für alle selbstfinanzierenden H

Hieraus folgt: daß P_1^* ein äquivalentes Martingalmaß ist.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sei $(M(n))_{n=0,\dots,N}$ ein P^* -Martingal. Wegen der Vollständigkeit existiert ein selbstfinanzierendes H mit $V_N(H) = \frac{M(N)}{B(N)}$, (aufdiskontieren)

Daraus folgt:

$$M_n = E^*(M(N)|F_n) = E^*(V_N^*(H)|F_n) = V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle, n = 1, \dots, N$$

Insbesondere ist $M_0 = V_0(H)$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei F_N -meßbare Abbildung, $M(n) := E^*(B(N)C|F_n), n = 0, \dots, N$ ist ein P^* -Martingal.

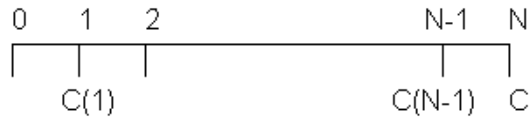
Damit besitzt $(M(n))_{n=0,\dots,N}$ die Darstellung $M(n) = M(0) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle, n = 0, \dots, N$, für selbstfinanzierendes H mit $V_0(H) = M(0)$ ist also $B_N V_N(H) = V_N^*(H) = B_N C$, also $V_N(H) = C$. H ist ein Hedge für C .

Gezeigt ist also:

Jede F_N -meßbare Claimauszahlung C am Ende durch eine selbstfinanzierende Han-

delstrategie hedgebar.

Hieraus folgt die Vollständigkeit des Modells.



Lege auf Konto und halte bis zum Ende

$$C(N) + C(N-1) \frac{\beta(N)}{\beta(N-1)} + C(N-2) \frac{\beta(N)}{\beta(N-2)} + \dots + C(1) \frac{\beta(N)}{\beta(1)}$$

Aussage:

Das Modell ist vollständig ist äquivalent zu jede F_N -Maßbare Abbildung C ist durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie hedgebar.

Bislang:

Preisfestsetzung für hedgebare Claims der Form

$$C(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ C(n) & \text{für } k = n \end{cases}$$

Ziel: Bewertung von allgemeinen hedgebaren Claims.

Vorgehen: Erweiterung des Finanzmarktmodell um Dividendenzahlungen.

21.12.2009

4.21 Finanzmarktmodell mit Dividendenzahlung

Gegeben sei ein N -Perioden-Modell mit Preisprozeß $(S(n))_{n=0,\dots,N}$

Am Ende jeder Periode erhält der Besitzer des k -ten Finanzgutes eine Ausschüttung (Dividende) von $(D_k(n))_{n=1,\dots,N-1}$

$(D(n))_{n=1,\dots,N-1}$ wird als R^d -wertiger adaptierter stochastischer Prozeß angenommen. Wir nehmen an, daß die risikofreie Anlage keine Dividendenzahlung zahlt. Also $D_1(n) \equiv 0$ für $n = 1, \dots, N-1$. Dann ist $B(n) = \frac{1}{S_1(n)} = \frac{1}{B(N)}$, $n = 0, \dots, N$ der Diskontierungsprozeß auch im Modell mit Dividenden.

In diesem um den Dividendenprozeß erweiterte Modell sind Handelstrategien wie vorher R^d -wertige Prozesse. Zu einer Handelsstrategie H wird der Entnahmeprozess $(\delta_n(H))_{n=1,\dots,N-1}$ definiert durch.

$$\delta_n(H) = \langle H(n), D(n) \rangle + \langle H(n), S(n) \rangle - \langle H(n+1), S(n) \rangle.$$

Die Begriffe Handelsarbitrage, Arbitragefreiheit, Claim und Hedge können dann analog zum Modell ohne Dividendenzahlung definiert werden.

Ein Claim $C = (C(n))_{n=1,\dots,N}$ entspricht einem Finanzgut, das am Ende der n -ten Periode die Ausschüttung $C(n)$ zahlt, $n = 1, \dots, N-1$ und den Endwert $C(N)$ besitzt.

Für eine Handelsstrategie H ist der Wertprozeß (vor Dividendenauszahlung) definiert durch $V_n(H) = \langle H(n), S(n) \rangle + \langle H(n), D(n) \rangle$ für $n = 1, \dots, N - 1$

$$V_0(H) = \langle H(1), S(0) \rangle$$

$$V_N(H) = \langle H(N), S(N) \rangle$$

Frage: Wie ist der Preisprozeß festzulegen für C , ohne dass sich Arbitragemöglichkeiten ergeben.

4.22 Satz

In einem arbitragefreien N -Perioden Modell mit Preisprozeß $(S(n))_{n=0, \dots, N}$ und Dividendenprozeß $(D(n))_{n=1, \dots, N-1}$ sei $C = (C(n))_{n=1, \dots, N}$

ein hedgebarer Claim mit Hedge H . Erweitere das Modell um den Handel mit C durch den Dividendenprozeß $\tilde{D}(n) = \begin{pmatrix} D(n) \\ C(n) \end{pmatrix}$, $n = 1, \dots, N$ und den Preisprozeß

$$\tilde{S}(n) = \begin{pmatrix} S(n) \\ P_n(C) \end{pmatrix} \text{ mit } \tilde{S}(N) = \begin{pmatrix} S(N) \\ C(N) \end{pmatrix}$$

Dann ist äquivalent:

- (i) das erweiterte Modell ist arbitragefrei
- (ii) $P_n(C) = \langle H(n+1), S(n) \rangle$ für alle $n = 0, \dots, N - 1$

Beweis:

analoges Arbitrageargument wie beim Modell ohne Dividendenzahlungen.

Frage:

- Wie kann eine risikoneutrale Bewertung in einem Modell mit Dividenden durchgeführt werden.
- Was ist ein äquivalentes Martingalmaß

4.23 Äquivalentes Martingalmaß

Gegeben sei ein Finanzmarktmodell mit $(S(k))_{k=0, \dots, N}$ und Dividendenprozeß $(D(k))_{k=1, \dots, N-1}$

Bezeichne mit

$$I(n) = \sum_{k=1}^n D(k)B(k), \quad n = 0, \dots, N \text{ mit } D(N) \equiv 0$$

den aufsummierten Prozeß der abdiskontierten Dividenden.

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^* heißt äquivalentes Martingalmaß, wenn gilt:

- (i) $P^* \sim P$
- (ii) $(S^*(n) + I(n))_{n=0, \dots, N}$ ist ein P^* -Martingal

4.24 Stochastische Integraldarstellung von selbstfinanzierenden Handelsstrategien

Eine Handelsstrategie H ist selbstfinanzierend genau dann, wenn $\delta_n(H) = 0$ für alle $n = 1, \dots, N-1$

$$\Leftrightarrow \langle H(n), S(n) + D(n) \rangle = \langle H(n+1), S(n) \rangle \text{ für alle } n = 1, \dots, N-1$$

$$\Leftrightarrow \langle H(n+1), S(n+1) \rangle + \langle H(n+1), D(n+1) \rangle - \langle H(n), S(n) + D(n) \rangle = \langle H(n+1), S(n+1) \rangle - \langle H(n+1), S(n) \rangle + \langle H(n+1), D(n+1) \rangle \text{ für alle } n = 1, \dots, N-1$$

$$\Leftrightarrow \Delta V_{n+1}(H) = \langle H(n+1), \Delta S(n+1) \rangle + \langle H(n+1), D(n+1) \rangle \text{ für alle } n = 1, \dots, N-1, \text{ beachte } D(N) \equiv 0$$

$$\text{Zusammen mit } \Delta V_1(H) = \langle H(1), D(1) \rangle - \langle H(1), S(0) \rangle = \langle H(1), \Delta S(1) \rangle + \langle H(1), D(1) \rangle$$

folgt: H ist selbstfinanzierend

$$\Leftrightarrow V_n(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S(k) \rangle + \sum_{k=1}^n \langle H(k), D(k) \rangle$$

$$\Leftrightarrow V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta S^*(k) \rangle + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta I(k) \rangle \text{ für alle } n = 1, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow V_n^*(H) = V_0(H) + H * (S^* + H)(n) \text{ für alle } n = 1, \dots, N$$

$$\text{Gilt } E^*|V_N^*(H)| < \infty$$

ist $(V_n^*(H))_{n=0, \dots, N}$ ein P^* -Martingal

4.25 integrierbare Handelsstrategie

In einem arbitragefreien N -Perioden Modell mit äquivalentem Martingalmaß P^* wird eine Handelsstrategie als integrierbar bezeichnet:

$$E^*|V_n^*(H)| < \infty \text{ für alle } n = 1, \dots, N \text{ und } E^*|\delta_n^*(H)| < \infty \text{ für alle } n = 1, \dots, N-1$$

Hierbei ist

$$V_n^*(H) = B(n)V_n(H) = B(n)(\langle H(n), S(n) + D(n) \rangle), \delta_n^*(H) = B(n)\delta_n(H)$$

Satz: Für eine integrierbare Handelsstrategie H gilt:

$$B(k) \langle H(k+1), S(k) \rangle = E^*\left(\sum_{i=k+1}^{N-1} \delta_i(H)B(i) | F_k\right) + E^*(B(N)V_N(H) | F_k) \quad \forall k = 0, \dots, N-1$$

d.h. das Portfolio nach Umschichtung am Ende der k -ten Periode ist der bedingte Erwartungswert- gegeben F_K der zukünftigen auf K abdiskontierten Entnahme.

Beweis:

man kann leicht einsehen:

$$V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(k), \Delta(S^* + I)(U) \rangle - \sum_{k=1}^{N-1} \delta_K(H)B(K) \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$\text{Also gilt: } E^*(V_n^*(H) | F_n) = V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(K), \Delta(S^* + I)(U) \rangle - \sum_{k=1}^{N-1} E^*(S_K(H)^* | F_n)$$

da $(\sum \langle H(K), \Delta(S^* + I)(K) \rangle)$ ein P^* -Martingal

$$\begin{aligned}
 &= V_0(H) + \sum_{k=1}^n \langle H(K), \Delta(S^* + I)(K) \rangle - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(H)^* - \delta_n^*(H) - \sum_{k=n+1}^N E^*(\delta_K(H)^* | F_n) \\
 &= V_n^*(H) - \delta_n^*(H) - \sum_{k=n+1}^N E^*(\delta_k(H)^* | F_n) \\
 &= \langle H(n+1), S(n) \rangle B(n) - \sum_{k=n+1}^{N-1} E^*(\delta_k^*(H) | F_n)
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

04.01.2010

4.26 Bewertung von Claims mittels äquivalentem Martingalmaß

Gegeben sei ein arbitragefreies N-Perioden Modell mit Preisprozeß $(S(k))_{k=0, \dots, N}$ und Dividendenprozeß $(D(k))_{k=1, \dots, N-1}$

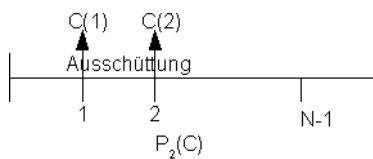
Sei $C = (C(n))_{n=1, \dots, N}$ ein Claim mit interpretierbarem Hedge bzgl. eines äquivalenten Martingalmaßes P^* .

Erweitere das Modell um den Handel mit C durch

$$\tilde{S}(k) = \begin{pmatrix} S(k) \\ P_k(C) \end{pmatrix}, k = 0, \dots, N-1$$

$$S(N) = \begin{pmatrix} S(N) \\ C(N) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}(k) = \begin{pmatrix} D(k) \\ C(k) \end{pmatrix}, k = 1, \dots, N-1$$



Dann sind äquivalent:

(i) das erweiterte Modell ist arbitragefrei

(ii) $B(k)P_k(C) = E^* \left(\sum_{l=k+1}^{N-1} B(l)C(l) | F_k \right) + E^*(B(N)C(N) | F_k)$ für alle $k = 0, \dots, N-1$

1

Beweis:

Wegen Satz (4.21) gilt:

Modell ist arbitragefrei $\Leftrightarrow P_k(C) = \langle H(k+1), S(k) \rangle, k = 0, \dots, N-1$

Wegen (4.24) gilt:

$$B(k) \langle H(k+1), S(k) \rangle = E^* \left(\sum_{l=k+1}^{N-1} B(l) \delta_l(H) | F_k \right) + E^*(B(N) V_N(H) | F_k)$$

$$\underline{\underline{\text{H ist Hedge für C}}} \quad E^* \left(\sum_{l=k+1}^{N-1} B(l) C(l) | F_k \right) + E^*(B(N) C(N) | F_k)$$

4.27 Das CRR-Modell mit Dividendenzahlungen

Erweiterung des CRR-Modells um periodische Dividendenzahlungen

periodische Dividendenrendite δ

Betrachte das CRR-Modell ohne Dividendenzahlungen der Form

$$\beta(n) = S_1(n) = (1 + \rho)^n, n = 0, \dots, N$$

$$A(n) = A(0) \prod_{i=1}^n Y_i, (Y_i)_{i=1}^n \text{ iid}, P(Y_i = u) = p = 1 - P(Y_i = d)$$

$$d < 1 + \rho < u$$

Die Eigenkapitalgeber (Aktionäre) verlangen eine periodische Ertragsausschüttung auf ihr eingesetztes Kapital

Das wird im Modell dadurch berücksichtigt, dass eine periodische Dividende mit Rendite ρ ausbezahlt wird.

Das ausgeschüttete Kapital reduziert sofort das Eigenkapital, also die Marktkapitalisierung des Unternehmens bzw. der Aktienkurs.

Dies führt zu folgendem Modell:

Setze $D(1) = A(0)Y_1\delta$, Dividende nach der ersten Periode

Der um die Dividendenzahlung reduzierte Aktienkurs ist dann $A^{(\delta)}(1) = A(1) - D(1) = A(0)Y_1(1 - \delta)$

In der zweiten Periode erhöht dieser sich potentiell auf $Y(2)$.

Setze $D(2) = A^{(\delta)}(1)Y(2)\delta = A(0)Y_1Y_2(1 - \delta)\delta = A(2)(1 - \delta)\delta$

$D(2)$ wird am Ende der zweiten Periode ausbezahlt. Es erhalte den neuen Aktienkurs durch $A^{(\delta)}(2) = A^{(\delta)}(1)Y(2)(1 - \delta) = A(0)Y(1)Y(2)(1 - \delta)^2 = A(2)(1 - \delta)^2$

Dies kann man so fortsetzen. Für die n -ten Periode erhält man:

$$D(n) = A^{(\delta)}(n-1)Y(n)\delta = A(n-1)(1 - \delta)^{n-1}Y_n\delta$$

$$A^{(\delta)}(n) = A^{(\delta)}(n-1)Y(n)(1 - \delta) = A(n)(1 - \delta)^n$$

Dann ist das CRR-Modell mit Dividendenrendite δ definiert durch:

$(A^{(\delta)}(n))_{n=0, \dots, N}, (D(n))_{n=1, \dots, N-1}$ als Prozess für die Aktienkursentwicklung und Dividendenentwicklung.

$(A^{(\delta)}(n))_{n=0, 1, \dots}$ ist ein geometrischer Randomwalk mit Sprunghöhen $u(1 - \delta), d(1 - \delta)$

Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes.

$$\text{Für } I(n) = \sum_{k=1}^n D(k)B(k) = \sum_{k=1}^n \frac{D(k)}{(1+\delta)^k}, n = 1, \dots, N-1$$

$$\frac{A^{(\delta)}(n)}{(1+\rho)^n} + I(n) = \frac{A^{(\delta)}(n)}{(1+\rho)^n} + \sum_{k=1}^n \frac{D(k)}{(1+\rho)^k}$$

$$= \frac{A(n)(1-\delta)^n}{(1+\rho)^n} + \sum_{k=1}^n \frac{A(k)(1-\delta)^{k-1}\delta Y_k}{(1-\rho)^k}$$

Also gilt für eine Sprungwahrscheinlichkeit p^*

$$E^*(A^{(\delta)*}(n+1) + I(n+1)|F_n)$$

$$= (*) A(n) \underbrace{\frac{(1-\delta)^n}{(1+\rho)^n} E^* Y_{n+1} \frac{1+\delta}{1+\rho}}_{E^*(A^{(\delta)*}(n+1)|F_n)}$$

$$= A(n) \frac{(1-\delta)^n}{(1+\rho)^n} \left(E^* Y_1 \left(\frac{1-\delta}{1+\rho} + \frac{\delta}{1-\rho} \right) \right) + I(n)$$

$$= \frac{A^{(\delta)}(n)}{(1+\rho)^n} \frac{E^* Y_1}{1+\rho} + I(n)$$

Dies ist ein Martingal genau dann, wenn $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$

(*) folgt aus:

$$E^*(D(n+1)|F_n) = E^*(A(n)(1-\delta)^n Y_{n+1} \delta | F_n) = A(n)(1-\delta)^n \delta E^*(Y_{n+1}|F_n) = A(n)(1-\delta) \delta E^* Y_{n+1}$$

Feststellung:

Das äquivalente Martingalmaß ist im CRR-Modell ohne Dividende und mit Dividende das Gleiche.

Wozu eigentlich die Dividendenbetrachtung?

Die Auszahlung von Claims hängt davon ab, ob eine Dividende ausgeschüttet wird, oder nicht.

Bsp.: Calloption:

$(A(N) - K)^+$ im Modell ohne Dividenden

$$(A^{(\delta)}(n) - K)^+ = ((1-\delta)^N A(N) - K)^+$$

Der Callinhaber partizipiert nicht an der Dividenausschüttung ist der Preis im Modell mit Dividenden für einen Call geringer als wenn keine Dividenden gezahlt werden.

$$E^*((A^{(\delta)}(N) - K)^+ B(N)) = E^*((1-\delta)^N A(N) - K)^+ + B(N) < E^*((A(N) - K)^+ B(N))$$

07.01.2010

5 Der Wiener Prozeß

- Zur Modellierung von Aktienkursen in zeitstetigen Modell wird der Wiener Prozeß (Brownsche Bewegung) benötigt.

5.1 Definition

Sei $(F_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, O) .

Ein adaptiver stochastischer Prozeß: $W = (W_t)_{t \geq 0}$

heißt Wiener Prozeß, wenn gilt:

- (i) $W(0) = 0$, P-fast sicher
- (ii) $W(t) - W(s)$ ist stochastisch unabhängig von F_s für alle $0 \leq s \leq t$
- (iii) $W(t) - W(s)$ ist $N(0, t - s)$ verteilt für alle $0 \leq s \leq t$.
- (iv) W besitzt stetige Pfade, d.h. P-fast sicher ist
 $t \rightarrow W_t(\omega)$ stetig

$(W(t))_{t \geq 0}$ ist ein sogenannter Prozeß mit unabhängigen und stationären Zuwächsen, d.h. $W_t - W_s$ ist unabhängig von F_s für alle $s \leq t$. und $W_t - W_s \sim W_{t+h} - W_{s+h}$ für alle $0 \leq s \leq t$, $h \geq -s$

$\sim W_{t-s}$

So einen Prozeß nennt man auch Levy-Prozeß.

Der Wiener Prozeß ist der Levy-Prozeß, der stetige Pfade hat.

- erste Finanzmarktmodell von Machelier um 1900 basiert auf den Wiener Prozeß.
- 1905 führt Einstein die Brownsche Bewegung ein
- 1921 erste mathematisch fundierte Beweis für die Existenz der Brownschen Bewegung durch Norbert Wiener

5.2 kanonische Darstellung

$C([0, \infty)) := \{x : [0, \infty) \rightarrow R | x \text{ ist stetig}\}$

$\Pi_t : C([0, \infty)) \rightarrow R$

$x \rightarrow x(t)$, t-te Projektion

für alle $t \geq 0$

Durch $\sigma(\Pi_t) = \Pi_t^{-1}(A) : A \in \mathcal{L}(R)$ wird die kleinste σ -Algebra auf $C[0, \infty)$ definiert, die Π_t meßbar macht.

Definiere $\mathcal{L}_t = \sigma(\bigcup_{s \leq t} \sigma(\Pi_s)) = \sigma(\bigcup_{s \leq t} \Pi_s^{-1}(A) * A \in \mathcal{L}(R))$

$= \sigma(\Pi_s : s \leq t)$

Dann ist $\mathcal{L}_t$ die kleinste σ -Algebra, die alle Π_s mit $s \leq t$ meßbar macht.

Setze $\mathcal{L}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{L}_t) = \sigma(\Pi_t : t \geq 0)$

$\mathcal{L}_\infty$ ist die kleinste σ -Algebra, die alle Projektionen Π_t , $t \geq 0$ meßbar macht.

Bem.: $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}(C([0, \infty)))$ stimmt mit der Borelschen σ -Algebra auf $C[0, \infty)$ überein, die durch die Topologien der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakte induziert wird.

Bem.:

$$\mathcal{E}_t := \{\Pi_{s_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \Pi_{s_m}^{-1}(A_m)$$

$$0 \leq s_1 < \dots < s_n \leq t, n \in \mathbb{N}$$

$$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{L}(R)\}$$

bildet eine $\cap$ -stabilen Erzeuger von $\mathcal{L}_t$.

Entsprechend: $\mathcal{E}_\infty = \{\Pi_{s_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \Pi_{s_n}^{-1}(A_n) : 0 \leq s_1 < \dots < s_n, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}(R)\}$ ist ein $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\mathcal{L}_\infty$.

Also $\sigma(\mathcal{E}_\infty) = \mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}(C[0, \infty))$

Für Wahrscheinlichkeitsmaße P_1, P_2 auf $(C[0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$ gilt dann:

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow P_1(T) = P_2(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{E}_\infty$$

$$\Leftrightarrow P_1(\Pi_{s_1} \in A_1, \dots, \Pi_{s_n} \in A_n) = P_2(\Pi_{s_1} \in A_1, \dots, \Pi_{s_n} \in A_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, 0 \leq s_1 < \dots < s_n, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}(R)$$

$$\Leftrightarrow P_1^{(\Pi_{s_1}, \dots, \Pi_{s_n})} = P_2^{(\Pi_{s_1}, \dots, \Pi_{s_n})}$$

für alle $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n, n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ die Familie der endlich dimensionalen Randverteilungen von Π bzgl. P_1 stimmt mit der von Π bzgl. P_2 überein.

Definition:

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(C(0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$ heißt Wiener-Maß, wenn $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bzgl. $(\mathcal{L}_t)_{t \geq 0}$ unter μ ist.

Der Wiener-prozeß liegt dann in kanonischer Darstellung vor.

Ist $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozeß auf (Ω, F) mit stetigen Pfaden, so ist $X(\Omega, F, P) \rightarrow (C[0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$ eine meßbare Abbildung und induziert ein Maß P^X auf $(C[0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$.

P^X ist die Verteilung des stochastischen Prozeßes $(X(t))_{t \geq 0}$.

Bemerkung:

X ist ein Wiener-Prozeß bzgl. $F_t = \sigma(X_s : s \leq t), t \geq 0$ genau dann, wenn die Verteilung von X das Wiener-Maß ist auf $(C([0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$

Bemerkung:

$X(\Omega, F) \rightarrow (C[0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$ ist meßbar genau dann, wenn $\Pi_t \circ X(\Omega, F) \rightarrow (R, \Omega, \mathcal{L}(R))$ meßbar ist für alle $t \geq 0$.

5.3 Lemma

Seien $(M_1, \mathcal{M}_1)$, $(M_2, \mathcal{M}_2)$ meßbare Räume. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ unter σ -Algebra von $\mathcal{F}$.

Seien $X_1 : \Omega \rightarrow M_1$

$X_2 : \Omega \rightarrow M_2$

meßbare Abbildung und $h : (M_1 \times M_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \rightarrow (R; \mathcal{L})$ meßbar.

Es gelte ferner

- (i) X_1 ist unabhängig von $\mathcal{G}$
- (ii) X_2 ist meßbar bzgl. $\mathcal{G}$
- (iii) $Eh(X_1, X_2)$ existiert

Dann gilt:

$E(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) = E(h(X_1, X_2)|X_2) = Eh(X_1, \cdot) \circ X_2$ P-fast sicher
(bereits bekannt: $E(h(X_1, X_2)|X_2 = x_2) = E(h(X_1, x_2))$)

Beweis: durch Erweiterungsschluß

- (i) für $h = 1_{A \times B}$ mit $A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2$ gilt:

$$\begin{aligned} E(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) &= E(1_{X_1 \in A} 1_{X_2 \in B} | \mathcal{G}) \\ &\stackrel{x_2 \text{ ist meßbar bzgl. } \mathcal{G}}{=} 1_{X_2 \in B} E(1_{X_1 \in A} | \mathcal{G}) \\ &\stackrel{\text{da } X_1 \text{ stoch. unabh. von } \mathcal{G}}{=} 1_{X_2 \in B} P(X_1 \in A) \\ &= (1_B \circ X_2) P(X_1 \in A) \\ &= Eh(X_1, \cdot) \circ X_2 \end{aligned}$$

und damit gilt auch $E(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) = E(h(X_1, X_2)|X_2)$

- (ii) Für $h = 1_D$ mit $D \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ folgt die Behauptung mit einem Dynkin-System Schluss.

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 : h = 1_D \text{ erfüllt die Beh.}\}$$

bilde ein Dynkin-System und erhält wegen (i) den $\cap$ -stabilen Erzeuger $\mathcal{E} = A \times B : A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2$

Also folgt:

$$\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$$

- (iii) Durch Linearität folgt die Behauptung denn für positive Treppenfunktionen und urch monotone Linien für positive, meßbare Funktionen. Durch Aufspaltung in Positiv und Negativteil erhält man schliesslich die Behauptung.

5.4 Markov-Eigenschaft

Sei $(W(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bzgl. $(F_t)_{t \geq 0}$. Dann gilt:

W ist ein zeitlich homogener Markov-Prozeß mit Übergangskern $K_t(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-1/(2t)(y-x)^2} dy =$

$$N(x, t)(A) = N(0, t)(A - x)$$

für alle $A \in \mathcal{L}(R), x \in R, t \geq 0$

Beweis:

Für $s, t \geq 0, A \in \mathcal{L}(R)$ gilt:

$$P(W(t+s) \in A | F_s) = P(W(t+s) - W(s) + W(s) \in A | F_s)$$

$$\stackrel{5.3}{=} P(W(t+s) - W(s) + W(s) \in A | W(s))$$

$$= P(W(t+s) - W(s) \in A - x) |_{x=W(s)}$$

(setze $g(x) = P(W(t+s) - W(s) \in A - x)$ und $g(W(s)) = g \circ W(s)$)

$$= N(0, t)(A - x) |_{x=W(s)}$$

$$= N(x, t)(A) |_{x=W(s)}$$

$$= K_t(W(s), A) \text{ P-fast sicher}$$

Damit folgt die Behauptung.

11.01.2010

$$P(W(t+s) \in A | F_s) = P(W(t+s) \in A | W_s) = N(W(s), t)(A) = K_t(W(s), A)$$

Ausdehnen der Markov-Eigenschaft:

Definiere den Wiener-Prozeß $(W^{(x)}(t))_{t \geq 0}$ zum Startpunkt $x \in R$ durch $W^{(x)}(t) := x + W(t), t \geq 0$

$W^{(x)}$ ist eine Zufallsvariable mit Werten in $(C[0, \infty), \mathcal{L}_\infty)$

Bezeichne mit μ_x die Verweitung von $W^{(x)}$, μ_x ist das sogenannte Wiener-Maß für eine Wiener-Prozeß mit Startpunkt x .

Definiere einen stochastischen Kern $\bar{K} : R \times \mathcal{L}_\infty \rightarrow [0, 1]$

$$(x, B) \rightarrow \mu_x(B)$$

Es gilt also:

$$\bar{K}(x, B) = \mu_x(B) = [Da(W_t^{(x)} - x)_{t \geq 0} \text{ ist ein Wiener-Prozeß, Start aus der 0}] \mu(B - x)$$

für alle $x \in R, B \in \mathcal{L}_\infty$

Dann gilt für jedes meßbare $f : C[0, \infty) \rightarrow R$ mit $Ef((W_{s+t}^{(x)})_{t \geq 0})$

$$E(f((W_{s+t}^{(x)})_{t \geq 0}) | F_s) = E(f((W_{s+t}^{(x)})_{t \geq 0}) | W_s^{(x)})$$

$$= \int_{C[0, \infty)} f(y) \bar{K}(W^{(x)}, dy)$$

Beweis: Für die $C[0, \infty)$ -wertige Zufallsvariable $(W_{t+s}^{(x)} - w_s^{(x)})_{t \geq 0} =: X_1, x_2 := W_s^{(x)}$ gilt:

$$f((w_{s+t}^{(x)})_{t \geq 0}) = h(X_1, X_2) \text{ mit } h = C[0, \infty) \times R \rightarrow R, (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1 + x_2)$$

Also liefert (5.3), da X_1 unabhängig von F_s und X_2 meßbar bzgl. F_s $E(h(X_1, X_2) | F_s) =$

$$E(h(X_1, X_2)|W_s^{(s)}) = E(h(X_1, \cdot) \circ X_2).$$

Für jedes $z \in R$ gilt:

$$\begin{aligned} Eh(X_1, z) &= E(f(W_{s+t}^{(x)} - W_s^{(x)} + z)_{t \geq 0}) \\ &= E(f((W_t + z)_{t \geq 0})) = \int_{C[0, \infty)} f(y) \mu_z(dy) \\ &= \int_{C[0, \infty)} f(y) \bar{K}(z, dy) \end{aligned}$$

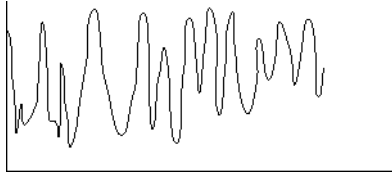
Also gilt:

$$E(f((w_{s+t}^x)_{t \geq 0})|F_s) = \int \{f(y) \bar{K}(W_s^{(x)}, dy)\}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

Kurz:

Gegeben: $W_s^{(x)} = z$ verhält sich wie $(W_{s+t}^{(x)})_{t \geq 0}$ wie ein Wiener-prozeß startend aus z .



5.5 Starke Markov-Eigenschaft

- Ausdehnen der Markov-Eigenschaft auf Stopzeiten.

Sei $(W(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bzgl einer Filtration $(F_t)_{t \geq 0}$. Sei $x \in R$ und τ eine Stopzeit.

Dann gilt:

- (i) $P((W_{\tau+t}^{(x)})_{t \geq 0} \in B, \tau < \infty | F_\tau) = \bar{K}(W_\tau^{(x)}, B) 1_{\tau < \infty}$
 $P((W_{t+\tau}^{(z)})_{t \geq 0} \in B) |_{z=W^{(x)}(\tau)} 1_{\tau < \infty}$ für alle $B \in \mathcal{L}_\infty$
- (ii) $E(f((W_{\tau+t})_{t \geq 0}) 1_{\tau < \infty} | F_\tau)$
 $= \int_{C[0, \infty)} f(y) \bar{K}(W_\tau^{(x)}, dy) 1_{\tau < \infty}$

Beweis:

Führe den Beweis für $P(\tau < \infty) = 1$ durch:

Analog zu (5.4) folgt die Behauptung, wenn wir wissen $(W_{\tau+t}^{(x)} - W_\tau^{(x)})_{t \geq 0}$ stochastisch unabhängig von F_τ und verteilt wie ein Wiener-Prozeß ist.

1.Schritt:

Zeige: $W_{\tau+t}^{(x)} - W_\tau^{(x)}$ ist stochastische unabhängig von F_τ und $N(0, t)$ verteilt für alle $t \geq 0$.

Approximiere τ durch eine Stopzeit ρ_n , die Werte auf einem Gitter im $k/2^n : k \in N_0$

hat mittels

$$\rho_n = \inf\{\frac{k}{2^n} : \tau \leq \frac{k}{2^n}\}.$$

Dann gilt:

$\tau \leq \rho_n$ für alle n und damit $F_\tau \subset F_{\rho_n}$.

Weiter ist für jedes beschränkt stetige $f : R \rightarrow R$ und $A \in F_\tau$

$$Ef(W_{\rho_n+t}^{(x)} - W_{\rho_n}^{(x)})1_A = \sum_{k=0}^{\infty} Ef(W_{\rho_n+t}^{(x)} - W_{\rho_n}^{(x)})1_{\rho_n=k/2^n \cap A} = \sum_{k=0}^{\infty} Ef(W_{k/2^n+t}^{(x)} - W_{k/2^n}^{(x)})1_{(k-1)/2^n < \tau \leq k/2^n \cap A}$$

$[A \in F_\tau \Leftrightarrow A \cap \tau \leq n \in F_n \text{ für alle } n \geq 0]$

$$\text{stochastisch Unabhängig} = \sum_{k=0}^{\infty} Ef(W_{k/2^n+t}^{(x)} - W_{k/2^n}^{(x)})P(A \cap S_n = k/2^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E(f(W_t)P(A \cap S_n = k/2^n)) = Ef(W_t)P(A)$$

Wegen der Stetigkeit der Pfade und der Beschränktheit von f gilt:

$$E(f(W_{\tau+t}^{(x)} - W_\tau^{(x)})1_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(f(W_{\rho_n+t}^{(x)} - W_{\rho_n}^{(x)})1_A) \\ = Ef(W_t)P(A)$$

Hieraus folgt, daß

$W_{\tau+t}$ unabhängig von F_τ und $N(0, t)$ -verteilt ist für festes t .

2. Schritt Dehne den ersten Schritt auf endlich viel Zeitpunkte aus:

Beh.: Für $t_1 < \dots < t_n$ gilt:

$(W_{\tau+t_n}^{(x)} - W_\tau^{(x)}, W_{\tau+t_{n+1}}^{(x)}, \dots, W_{\tau+t_1}^{(x)} - W_\tau^{(x)})$ ist unabhängig von F_τ und verteilt wie $(W_{t_n}, W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1})$

Dies erhält man durch Anwendung des ersten Schrittes auf $\tau + t_{n-1}, \tau + t_{n-2}, \dots, \tau$

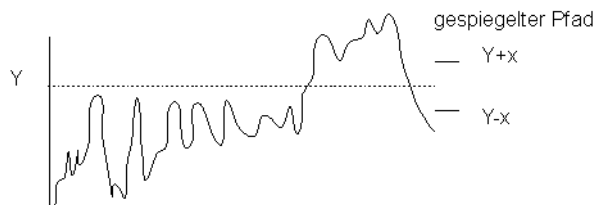
Dadurch sind:

$W_{\tau+t_n}^{(x)} - W_{\tau+t_{n-1}}^{(x)}, \dots, W_{\tau+t_1}^{(x)} - W_\tau^{(x)}$ stochastisch unabhängig von F_τ und verteilt wie $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_0$

Durch Anwenden einer linearen Transformation können diese in $(W_{\tau+t_1}^{(x)} - W_\tau^{(x)}, \dots, W_{\tau+t_1}^{(x)} - W_\tau^{(x)})$ bzw. $(W_{t_n}, \dots, W_{t_1})$

transformiert werden, was die Verteilungsgleichheit impliziert.

5.6 Verteilung des Maximums



Sei W ein Wiener-Prozeß: $M(t) := \sup\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$

Dann gilt für alle $t > 0, y > 0, x \geq 0$

$$P(M(t) \geq y, W(t) < y - x) = P(W(t) > y + x)$$

$$P(M(t) \geq y) = 2P(W(t) \geq y)$$

Beweis:

Sei $t > 0, y > 0, x \geq 0$

$$\tau_y = \inf\{s : W(s) = y\}$$

Dann gilt:

$$M(t) \geq y = \tau_y \leq t$$

$$\text{Also } P(M(t) \geq y, W(t) < y - x) = P(\tau_y \leq t, W(t) < y - x)$$

$$\underline{\text{starke M.E.}} \quad P(\tau_y \leq t, W(t) > y + x) = P(W(t) > y + x)$$

Für $x = 0$ also:

$$P(M(t) \geq y, W(t) < y) = P(W(t) > y)$$

und damit:

$$P(M(t) \geq y) = P(M(t) \geq y, W(t) < y) + P(M(t) \geq y, W(t) \geq y) = P(W(t) > y) + P(W(t) \geq y) = 2P(W(t) \geq y)$$

14.01.2010

5.7 Martingale

Sei $(W(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bzgl. einer Filtration $(F_t)_{t \geq 0}$. Dann gilt:

- (i) $(W(t))_{t \geq 0}$ ist ein Martingal
- (ii) $(W(t)^2 - t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal
- (iii) $(\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t))_{t \geq 0}$ ist ein Martingal für alle $\sigma \in R$.

Beweis für $s < t$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E(W(t)|F_s) &= E(W_t - W_s + W_s|F_s) = E(W(t) - W(s)|F_s) + E(W(s)|F_s) \\ &= E(W(t) - W(s)) - W(s) \\ &= \underbrace{E(W(t-s))}_{=0} + W(s) = W(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad E(W(t)^2|F_s) &\stackrel{\text{M.E.}}{=} \int y^2 K_{t-s}(W(s), dy) \\ &= \int y^2 N(W(s), t-s)(dy) \\ &= W(s)^2 + t - s \\ \text{Also } E(W(t)^2 - t|F_s) &= W(s)^2 - s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(iii) } E(\exp(\sigma W(t)) | F_s) \\
 &= E(\exp(\sigma(W(t) - W(s))) \exp(\sigma W(s)) | F_s) \\
 &= \exp(\sigma W(s)) E(\exp(\sigma(W(t) - W(s))) | F_s) \\
 &= \exp(\sigma W(s)) E \exp(\sigma(W(t-s))) \\
 &= \exp(\sigma W(s)) \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-1/(2(t-s))y^2} dy \\
 &\text{Also } E(\exp(\sigma(W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)) | F_s) = \exp(\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 s)
 \end{aligned}$$

5.8 der geometrische Wiener-Prozeß

Sie $(W(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bgl einer Filtration $(F_t)_{t \geq 0}$. Sei $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Dann wird der geometrische Wiener-Prozeß $(A(t))_{t \geq 0}$ mit Volatilitätsparameter σ und Drift μ definiert durch $A(t) = \exp(\mu t) \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ für alle $t \geq 0$

Für einen Startpunkt $x > 0$ wird durch $A^{(x)}(t) = x A(t) = x * e^{\mu t} \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ für alle $t \geq 0$

der geometrische Wiener-Prozeß mit Startpunkt x definiert.

$(A^{(x)}(t))$ ist ein zeitlich homogener Markov-Prozeß mit stetigen Pfaden und Übergangskern $P_t : (0, \infty) \times \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$

$$(z, B) \rightarrow P_t(z, B)$$

$$\text{der durch } P_t(z, (0, v]) = \Phi\left(\frac{(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)t + \log v - \log z}{\sigma\sqrt{t}}\right) \text{ für alle } v \geq 0$$

eindeutig bestimmt ist.

$$\Phi(x) = N(0, 1)((-\infty, x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Weiter gilt:

$$P_t(z, B) = P(A_t^z \in B) \text{ für alle } z > 0, \mathcal{L} \in B, t \geq 0$$

Beweis:

$$\text{zz.: } P(A_{s+t}^{(x)} \in B | F_s) = P_t(A_s^{(x)} | N) \text{ für alle } s, t \geq 0, B \in \mathcal{L}$$

Dies folgt aus der Unabhängigkeit von

$$\frac{A_{s+t}^{(x)}}{A_s^{(x)}} \text{ von } F_s$$

$$P(A_{s+t}^{(x)} \in B | F_s) = P\left(\frac{A_{s+t}^{(x)}}{A_s^{(x)}} A_s^{(x)} \in B | F_s\right)$$

$$\stackrel{5.3}{=} P\left(z \frac{A_{s+t}^{(x)}}{A_s^{(x)}} \in B\right) \Big|_{z=A_s^{(x)}}$$

$$= P(z A_t \in B) \Big|_{z=A_s^{(x)}}$$

$$= P_t(z, B) \Big|_{z=A_s^{(x)}}$$

$$= P_t(A_s^{(x)}, B)$$

$$\text{mit } P_t(z, B) = P(A_t^{(z)} \in B) = P(z A_t \in B)$$

Weiter gilt:

$$P_t(z, (0, v]) = P(z A_t \leq v)$$

$$= P(\mu t + \sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \leq \log v - \log z)$$

$$= P\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}} \leq \frac{\log v - \log z - \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\log v - \log z - \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Damit ist die Verteilungsfunktion und Dichte des Maßes $P_t(z, \cdot)$ bestimmt.

5.9 Lognormalverteilung

Eine Zufallsvariable X hat eine Lognormalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ genau dann, wenn $\log X$ eine $N(\mu, \sigma^2)$ Verteilung besitzt.

Kurz $X \sim LN(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \log X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ist $(A^{(x)}(t))_{t \geq 0}$ ein geometrischer Wiener-Prozeß mit Drift μ und Volatilität σ^2 und Startpunkt x , so ist

$$\log A^{(x)}(t) = \log x + \sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$$

Also ist $A^{(x)}(t) \sim LN(\log x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$

Für den Übergangskern des geometrischen Wiener-Prozeßes wird somit $P_t(x, \cdot) = P(A_t^{(x)} \in \cdot) = LN(\log x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$

5.10 Martingal für den geometrischen Wiener-Prozeß

Sei $A(t) = e^{\mu t} \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$, $t \geq 0$

ein geometrischer Wiener-Prozeß mit Start aus der 1.

Dann gilt:

$(A(t)^\alpha)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal $\Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$

Beweis: $A(t)^\alpha = \exp(\alpha\sigma W(t) - \frac{1}{2}(\alpha\sigma^2 - 2\alpha\mu)t)$

ist ein Exponentialmartingal genau dann, wenn $\alpha\sigma^2 - 2\alpha\mu = \alpha^2\sigma^2$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 - 2\mu = \alpha\sigma$$

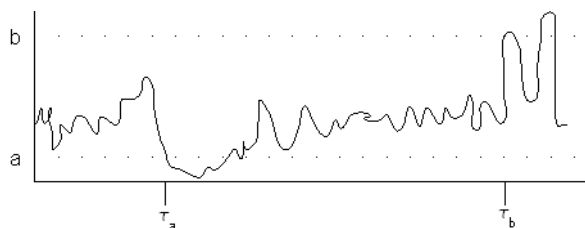
$$\Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$$

Anwendung:

Für $0 < a < 1 < b$ sei $\tau_a = \inf t \geq 0 : A(t) \leq a$

$\tau_b = \inf t \geq 0 : A(t) \geq b$

Was ist die Wahrscheinlichkeit erst die Barriere b vor a zu erreichen.



Berechnung von $P(\tau_b < \tau_a)$

$(A(t)^\alpha)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal f+r $\alpha = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$

Optional-Sampling liefert für $\tau = \inf\{t \geq 0 : A(t) \leq a \text{ oder } A(t) \geq b\}$

$$E(A(\tau)^\alpha) = A(0)^\alpha = 1$$

Also folgt:

$$1 = b^\alpha P(\tau_b < \tau_a) + a^\alpha \underbrace{P(\tau_a < \tau_b)}_{1 - P(\tau_b < \tau_a)}$$

$$\text{Dann liefert } P(\tau_b < \tau_a) = \frac{b^\alpha - 1}{b^\alpha - a^\alpha}$$

$$P(\tau_a < \tau_b) = \frac{1 - a^\alpha}{b^\alpha - a^\alpha}$$

5.11 Momente für den geometrischen Wiener-Prozeß

Sei $A(t) = e^{\mu t} \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$, $t \geq 0$

ein geometrischer Wiener-Prozeß mit Drift μ und Volatilität σ .

$$EA(t) = e^{\mu t} E \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

$$\text{Martingal} = e^{\mu t} \exp(\sigma * 0 - \frac{1}{2} * 0) = e^{\mu t}$$

$$EA(t)^2 = e^{2\mu t} E \exp(2\sigma W(t) - 2\sigma^2 t)$$

$$= e^{2\mu t} E \exp(2\sigma W(t) - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$$

$$= e^{2\mu t} E \exp(2\sigma W(t) - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$$

Also ist:

$$\text{Var } A(t) = EA(t)^2 - (EA(t))^2$$

$$= e^{2\mu t} E \exp(2\sigma W(t) - 2\sigma^2 t) - e^{2\mu t} = e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

18.01.2010

6 Das Black-Scholes-Modell

Ziel: Aufstellen eines zeitstetigen Finanzmarktmodells aus Aktie und Bankkonto
- Bewertung von Derivaten in diesem Modell

6.1 Modellierung von Aktienpreisen

Handelszeitraum $[0, T]$

Kursverlauf der Aktie wird beschrieben durch einen stochastischen Prozeß $(A(t))_{t \in [0, T]}$.

Annahmen:

- keine Kurssprünge, d.h. $(A(t))_{t \in [0, T]}$ hat stetige Pfade
- expected rate of return² ist konstant, d.h. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left(\frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)} \right) = \mu t \equiv \mu$
- variance rate of return ist konstant, d.h. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} Var \left(\frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)} \right) = \sigma^2(t) \equiv \sigma^2$
- return ist unabhängig von der Vergangenheit und zeitlich homogen, $\frac{A(t+h)}{A(t)}$ ist unabhängig von F_t und verhält sich wie $\frac{A(h)}{A(0)}$

Folgerung aus den Annahmen:

- In einem kleinen Zeitintervall δt hat der Return ungefähr die Form: $\frac{A(t+\delta t) - A(t)}{A(t)} = \underbrace{\mu \delta t}_{\text{deterministische Komponenten}} + \sigma \sqrt{\delta t} X$ mit X unabhängig von F_t , $Var X = 1$, $EX = 0$.

deterministische Komponenten

Also etwas: $\sqrt{\Delta t} X = W(t + \Delta t) - W(t)$

Dies führt auf die Differenzengleichung:

$\Delta A(t) = A(t)(\mu \delta t + \sigma \Delta W(t))$ mit $\Delta A(t) = A(t + \Delta t) - A(t)$ und $\Delta W(t) = W(t + \delta t) - W(t)$

Nun läßt man Δt gegen 0 streben.

Die Differenzengleichung geht dann über eine stochastische Differentialgleichung.

$dA(t) = A(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$ Dies entspricht der Integralgleichung:

$$A(t) - A(0) = \int_0^t A(s) \mu ds + \sigma \int_0^t A(s) dW(s)$$

Ein Prozeß A ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung genau dann, wenn Sie Lösung der stochastischen Integralgleichung ist.

In der Finanzmathematik II wird eine Definition des stochastischen Integrals gegeben und damit präzise definiert, welche Prozeß eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist.

Eine Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung:

$$dA_t = A(t)(\mu dt + \sigma dW_t), A(0) = x$$

Ist gegeben durch:

$$A^{(x)}(t) = x \exp(\sigma W(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 t) e^{\mu t}, t \geq 0$$

Dieser Prozeß wird als Aktienpreisprozeß im Black-Scholes-Modell verwandt. Dies ist eine geometrischer Wiener-Prozeß mit Startpunkt $A(0) = x$, Volatilität σ , Drift μ .

Eigenschaften:

- $dA(t) = A(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), A(0) = x$
- $(A^{(x)})_{t \geq 0}$ hat stetige Pfade

²mittlere Renditenrate

- expected rate of return ist konstant μ .
- $E \frac{A^{(x)}(t+h) - A^{(x)}(t)}{A^{(x)}(t)} = E e^{\mu h} \exp(\sigma(W(t+h) - W(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 h) - 1 = e^{\mu h} - 1 = \mu h + \sigma(h)$
- variance rat of return ist konstant σ^2
 $Var \frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)} = Var(e^{\mu h} \exp(\sigma W(h) - \frac{1}{2}\sigma^2 h)) = e^{2\mu h} Var(\exp(\sigma W(h) - \frac{1}{2}\sigma^2 h)) = e^{2\mu h} (e^{\sigma^2 h} - 1) = \sigma^2 h + \sigma(h)$
- return ist unabhängig von der Vergangenheit und zeitlich homogen, denn
 $\frac{A(t+h)}{A(t)} = e^{\mu h} \exp(\sigma(W(t+h) - W(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 h)$ ist unabhängig von F_t und
 $\frac{A(t+h)}{A(t)} \sim \frac{A(h)}{A(0)}$

Damit erfüllt $(A^{(x)}(t))_{t \geq 0}$ die anfangs formulierten Annahmen und liefert somit ein einfaches, plausibles Modell für eine Aktienpreisentwicklung in stetiger Zeit.

6.2 Definition des Black-Scholes-Modelles

- Handelszeitraum $[0, T]$ mit 2 Finanzgütern
- Bankkontoentwicklung: stetige Verzinsung mit Zinsrate $r > 0$, d.h. $S_1(t) = e^{rt}, 0 \leq t \leq T$
- Aktienpreisentwicklung entsprechend eines geometrischen Wiener-Prozesses mit Volatilität σ , Drift μ und Anfangskurs $x > 0$, d.h. $S_2(t) = x e^{\mu t} \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \leq T$
- Informationsverlauf ist gegeben durch eine Filtration $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$, so daß W ein Wiener-Prozeß bzgl. $(F_t)_{t \in [0, T]}$ ist.

6.3 Maßwechsel

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(F_t)_{t \geq 0}$ Filtration auf Ω . Sei $(L_t)_{t \geq 0}$ ein positives Martingal bzgl. P , und $\bar{P}$ ein weiteres Maß. Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, F) mit $\frac{d\bar{P}}{dP}|_{F_t} = L_t$ für alle $t \geq 0$

Dann gilt:

- Ist Y eine F_t -meßbare und es existiert $E_{\bar{P}} Y$, so
 $E_{\bar{P}}(Y|F_s) = \frac{E_P(Y L_t | F_s)}{L_s}$ für alle $s \leq t$
- (M_t) ist ein $\bar{P}$ -Martingal, genau dann, wenn $(M_t L_t)_{t \geq 0}$ ein P -Martingal ist.

- (iii) Ist $(R_t)_{t \geq 0}$ ein positives Martingal mit $ER_t = 1$, so kann man auf jedem F_t ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_T definiert werden mit $\frac{dQ_T}{dP}|_{F_t} = R_t$, für alle $t \leq T$.

Beweis:

zu (i): Sei Y F_t -meßbar, $A \in F_s$

Dann gilt:

$$\int_A Y d\bar{P} = \int_A Y L_t dP = \int_A E_P(Y L_t | F_s) dP = \int_A \frac{E_P(Y L_t | F_s)}{L_s} d\bar{P}$$

, da $\frac{d\bar{P}}{dP}|_{F_s} = \frac{1}{L_s}$

Hieraus folgt:

$$E_{\bar{P}}(Y | F_s) = \frac{E_P(Y L_t | F_s)}{L_s}$$

zu (ii): $(M_t)_{t \geq 0}$ ist ein $\bar{P}$ -Martingal

$$\Leftrightarrow \bar{E}(M_t | F_s) = M_s \text{ für alle } s \leq t$$

$$\stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} \frac{E(M_t L_t | F_s)}{L_s} = M_s \text{ für alle } s \leq t$$

$$\Leftrightarrow (M_t L_t)_{t \geq 0} \text{ ist ein } P\text{-Martingal}$$

zu (iii): Wegen $ER_T = 1$ existiert ein auf F_T äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q_T mit:

$$Q_T(A) = \int_A R_T dP \text{ für alle } A \in F_T$$

Für $A \in F_t$ für $t \leq T$ gilt:

$$Q_T(A) \stackrel{F_t \subset F_T}{=} \int_A R_T dP \stackrel{A \in F_t}{=} \int_A E(R_T | F_t) dP \stackrel{R \text{ ist Martingal}}{=} \int_A R_t dP$$

$$\text{also ist } \frac{dQ_T}{dP}|_{F_t} = R_t.$$

6.4 Grisanov-Transformation (einfacher Fall)

6.4.1 1.Fassung

Sei $(W(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß auf (Ω, F, P) bzgl. einer Filtration $(F_t)_{t \geq 0}$. Sei für $\theta \in R$ ein weiteres Maß P_θ auf (Ω, F_∞) gegeben mit der Eigenschaft $\frac{dP_\theta}{dP}|_{F_t} = L_t := \exp(\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ für alle $t \geq 0$

Dann gilt:

$$\bar{W}(t) = W(t) - \theta t, t \geq 0$$

definiert einen Wiener-Prozeß bzgl. P_θ .

Bzgl. P_θ verhält sich wie ein Wiener-Prozeß mit Drift θ .

21.01.2010

6.4.2 2.Fassung

$(W(t))_{t \geq 0}$ sei ein Wiener-Prozeß bzgl. P .

Sei ein weiteres Maß P_θ auf (Ω, F_∞) definiert mit:

$$\frac{dP_\theta}{dP} \Big| F_t = L_t = \exp(\theta W(t) - \tfrac{1}{2}\theta^2 t), \theta \in R$$

Dann gilt:

$$\overline{W}(t) = W(t) - \theta t, t \geq 0$$

definiert einen Wiener-Prozeß bzgl. P_θ

Beweis:

Zeige die definierenden Eigenschaften eine Wiener-Prozeßes:

- (i) $(\overline{W}(t))_{t \geq 0}$ hat stetige Pfade mit $\overline{W}(0) = 0$
- (ii) $\overline{W}(t) - \overline{W}(s)$ ist unabhängig von D_f (bzgl P_θ) und $N(0, t - s)$ verteilt.

(i) folgt aus der Tatsache, daß $(W(t))_{t \geq 0}$ stetige Pfade hat.

(ii) Sei g beschränkt meßbar:

$$zz.: E_\theta(g(W(t) - W(s)) | F_s) = \int g(s) N(0, t - s)(ds)$$

Wegen (6.3):

$$\begin{aligned} & E_\theta(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s)) | F_s) \\ & \stackrel{(6.3)}{=} \frac{E(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s)) L_t | F_s)}{L_s} \\ & = E(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s)) L_t / L_s | F_s) \\ & = E(g(W(t) - W(s) - \theta(t - s)) * \exp(\theta(W(t) - W(s)) - \tfrac{1}{2}\theta^2(t - s)) | F_s) \\ & \stackrel{W(t)-W(s) \text{ unabhängig von } F_s \text{ bzgl. } P}{=} E(g(W(t) - W(s) - \theta(t - s)) \exp(\theta(W(t) - W(s)) - \tfrac{1}{2}\theta^2(t - s))) \\ & = E(g(W(t - s) - \theta(t - s))) \\ & = \int_R g(x) N(0, t - s)(dx) \end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} & E(g(W(t) - \theta(t)) L_t) \\ & = E(g(W(t) - \theta(t)) \exp(W(t) - \tfrac{1}{2}\theta^2 t)) \\ & = E(g(W(t) - \theta(t)) \exp(\theta(W(t) - \theta t) + \theta^2 t - \tfrac{1}{2}\theta^2 t)) \\ & = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t} \int g(x) e^{\theta t} N(-\theta t, t)(dx), \text{ da } W(t) - \theta t \sim N(-\theta t, t) \\ & = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t} \int g(x) e^{\theta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-1/2t(x + \theta t)^2) dx \\ & = \int g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\tfrac{1}{2t}x^2) dx \\ & = \int g(x) N(0, t)(dx) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt $\overline{W}(t) \sim N(0, t)$ bzgl. P_θ .

6.5 Äquivalentes Martingalmaß

Wir betrachten ein BS-Modell entsprechend (6.2) Aktienpreisprozeß.

$$A^{(x)}(t) = xA(t) = x \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{\mu t} \text{ bzgl. } P.$$

Es soll nun ein zu P auf F_T äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^* angegeben werden, so daß

$(e^{-rt}A^{(x)}(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein P^* -Martingal ist.

Bezeichne mit $(L(t))_{0 \leq t \leq T}$ den Dichtequotientenprozeß $\frac{dP^*}{dP}|_{F_t} = L(t)$

Naheliegender Ansatz:

$$L(t) = \exp(\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t), 0 \leq t \leq T$$

für ein geeignetes $\theta \in R$.

Dann wird so ein zu P auf F_T äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, da $L_t > 0$, P -fast sicher für alle $0 \leq t \leq T$

Wegen (6.4) gilt:

$$\bar{W}(t) = W(t) - \theta t, 0 \leq t \leq T$$

ist ein Wiener-Prozeß bzgl. P^* und es gilt:

$$\begin{aligned} e^{-rt}A^{(x)}(t) &= x \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\theta\sigma^2 t) \exp(\mu t)e^{-rt} \\ &= \exp(\sigma(W(t) - \theta t) + \sigma\theta t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \mu t - rt) \\ &= x \exp(\sigma(\bar{W}(t) - \theta t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t + t(\mu - r + \sigma\theta)) \\ &= x \exp(\sigma\bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t + t(\mu - r - \mu\sigma)) \end{aligned}$$

Dies ist ein Martingal genau dann, wenn $\mu - r + \sigma\theta = 0$.

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

Also haben wir gezeigt, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf (Ω, F_T) mit $\frac{dP^*}{dP}|_{F_t} = \exp(\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t)$, $0 \leq t \leq T$ mit $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$

ein äquivalentes Martingalmaß für das BS-Modell definiert, dann $(e^{-rt}A^{(x)}(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein P^* -Martingal.

Bemerkung:

bzgl.: P^* ist der Aktienpreisprozeß ein geometrischer Wiener-Prozeß mit Drift r und Volatilität σ .

Beweis:

Vorige Rechnung zeigt:

$$A^{(x)}(t) = e^{rt}e^{-rt}A^{(x)}(t) = e^{rt}x \exp(\sigma\bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \text{ mit } (\bar{W}(t))_{0 \leq t \leq T} \text{ Wiener-Prozeß bzgl. } P^*.$$

Bemerkung:

Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_σ^* auf (Ω, F_T) durch:

$$\frac{dP_\sigma^*}{dP}|_{F_t} = \frac{e^{-rt}A^{(x)}(t)}{x} = e^{-rt}A(t), 0 \leq t \leq T$$

Dann ist $(A(t))_{0 \leq t \leq T}$ ein geometrischer Wiener-Prozeß bzgl. diesem Maß P_σ^* mit Drift $r + \sigma^2$ und Volatilität σ .

Beweis:

$e^{-rt}A(t) = \exp(\sigma\bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2t)$ mit Wiener-Prozeß $(\bar{W}(t))_{t \geq 0}$ bzgl. P^*

Girsanov liefert:

$\bar{\bar{W}}(t) = \bar{W}(t) - \sigma t, 0 \leq t \leq T$ ist ein Wiener-Prozeß bzgl. P_θ^* .

Also gilt:

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{rt} \exp(\sigma\bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2t) \\ &= e^{rt} \exp(\sigma(\bar{\bar{W}}(t) + \sigma t) - \frac{1}{2}\sigma^2t) \\ &= e^{(r+\sigma^2)t} \exp(\sigma\bar{\bar{W}}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2t) \text{ und damit die Beh..} \end{aligned}$$

Zusammenfassend kann man feststellen:

$A^{(x)}(t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein geometrischer Wiener-Prozeß mit Startpunkt x und den Parametern μ, σ bzgl. P .

und r, σ bzgl. P^*

$r + \sigma^2, \sigma$ bzgl. P_σ^*

6.6 Bewertung von Claims

Ein Claim ist ein Kontrakt, der seinem Inhaber die zufällige Auszahlung C am Ende der Laufzeit zusichert.

Mathematisch gesehen:

jede F_t -meßbare Abbildung wird als Claim bezeichnet.

Wir setzen im folgenden voraus:

- (i) $E^*|C| < \infty$
- (ii) C ist meßbar bzgl. $\sigma(W(s) : 0 \leq t \leq T)$ ³ Dann werden wir in Finanzmathematik II sehen, daß C durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie duplizierbar ist.

Analog wie im diskreten kann eine Bewertung von C durch die Mittlung der abdiskontierten Claimauszahlungen erfolgen.

Genauer:

Es gibt genau einen arbitragefreien Preisprozeß $(P_t(C))_{0 \leq t \leq T}$ für den Claim und es gilt:

$$e^{-rt}P_t(C) = E^*(e^{-rT}C | F_t), 0 \leq t \leq T$$

6.7 Black-Scholes-Formel

Im BS-Modell soll der Preisprozeß eines Calls mit Laufzeit T und Basis K berechnet werden. Dies entspricht dem Claim:

³Preis ist so angebbbar

$$C = (A^{(x)}(T) - K)^+$$

Für den Anfangspreis des Calls gilt wegen (6.6) $P_+(C) = E^*(e^{-rT}(A^{(x)}(T) - K)^+)$

$$= E^*e^{-rT}(A^{(x)}(T) - K)1_{A^{(x)}(T) > K}$$

$$= E^*e^{-rT}A^{(x)}(T)1_{A^{(x)}(T) > K} - e^{-rT}KP^*(A^{(x)}(T) > K)$$

$$= xP_\sigma^*(A^{(x)}(T) > K) - e^{-rT}KP^*(A^{(x)}(T) > K)$$

$$\text{mit } \frac{dP_\sigma^*}{dP^*}|_{F_T} = \frac{e^{-rT}A^{(x)}(T)}{x}$$

Bzgl. P^* ist $(A(t))_{t \geq 0}$ ein geometrischer Wiener-Prozeß mit Drift r und Volatilität σ .

$$A(t) = e^{rt} \exp(\sigma \bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Also:

$$A(T) \leq \frac{K}{x} \Leftrightarrow \sigma \bar{W}(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T \leq \log\left(\frac{K}{x}\right) - rT$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{W}(T)}{\sqrt{T}} \leq \frac{\log(\frac{K}{x}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\text{und damit } P_\sigma^*(A(T) > \frac{K}{x}) = 1 - P_\sigma^*(A(T) \leq \frac{K}{x})$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{x}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Analog kann:

$P_\sigma^*(A(T) > \frac{K}{x})$ berechnet werden, denn

$$A(t) = e^{(r+\sigma^2)t} \exp(\sigma \bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Also:

$$\{A(t) \leq \frac{K}{x}\} = \left\{ \frac{\bar{W}(T)}{\sqrt{T}} \leq \frac{\log(\frac{K}{x}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right\}$$

und damit:

$$P_\sigma^*(A(T) > \frac{K}{x}) = 1 - P_\sigma^*(A(T) \leq \frac{K}{x})$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\log(\frac{K}{x}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

25.01.2010

Bezeichnen wir den Anfangspreis des Call mit Anfangsanktuenkurs c , Laufzeit T und Basis K mit $c(x, T, K)$, so erhält man also:

$$c(x, T, K) = x * \Phi\left(\frac{\log(x/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = -Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\log(x/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Da der Aktienkurs - gegeben F_t sich verhält, wie ein Black-Scholes-Modell mit Laufzeit $T - t$ und Anfangskurs $A_t^{(x)}$ ergibt sich für den Callpreis $P_t(C)$ zum Zeitpunkt t .

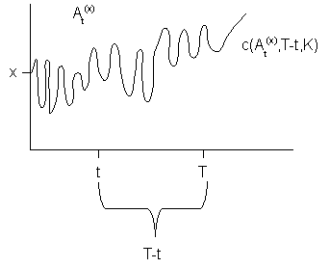
$$P_t(C) = c(A_t^{(x)}, T - t, K).$$

Genauere Argumentation mit der Markov-Eigenschaft und (6.6).

$$P_t(C) = e^{rt} E^*(e^{-rT}(A^{(x)}(T) - K)^+ | F_t) = e^{-r(T-t)} E^*((A^{(x)}(T) - K)^+ | F_t)$$

$$\stackrel{M.E.}{=} e^{-r(T-t)} \int_0^\infty (y - K)^+ P_{T-t}(A_t^{(x)}, dy)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-r(T-t)} E^*(A^{(z)}(T-t) - K)^+ |_{z=A_t^{(x)}} \\
 &= E^* e^{-r(T-t)} (A^{(z)}(T-t) - K)^+ |_{z=A_t^{(x)}} \\
 &[A^{(x)}(t-s) \text{ gegeben } A_t^{(x)} = z \text{ verhält sich wie } A^{(z)}(s)] \\
 &= c(z, T-t, k) |_{z=A^{(x)}} = c(A_t^{(x)}, T-t, K)
 \end{aligned}$$



6.8 Greeks

Wie ist die Abhängigkeit des Black-Scholes-Preises von den Parametern.

Sei $C(x, t, \sigma, K)$ der Preis der Call-Option mit Laufzeit t , Anfangsaktienkurs x , Volatilität σ und Basis k .

Setze $h_1 = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{T}}$

$$h_2(x, t) = h_1(x, t) - \sigma\sqrt{T} = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{T}}$$

Dann gilt:

$$c(x, t, \sigma, K) = x\Phi(h_1(x, t)) - e^{-rt}K\Phi(h_2(x, t))$$

Eigenschaften:

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} c(x, t, \sigma, K) = (x - K)^+$$

$$\text{Es gilt: } \lim_{t \rightarrow 0} h_1(x, t) = \begin{cases} -\infty & x > k \\ 0 & x = k \\ -\infty & x < k \end{cases}$$

$$\text{und } \lim_{t \rightarrow 0} h_2(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} h_1(x, t) - \sigma\sqrt{T} = \lim_{t \rightarrow 0} h_1(x, t)$$

$$(ii) \partial_t c + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 c + \tau x \partial_x c - rc = 0 \text{ auf } (0, \infty) \times (0, \infty)$$

Dies ist die Black-Scholes-Differentialgleichung.

$$(x, t) \rightarrow c(x, t, \sigma, K) \text{ erfüllt die DGL, da } x\phi(h_1(x, t)) - Ke^{-rt}\phi(h_2(x, t)) = 0$$

$$(iii) c \text{ ist strikt wachsend als Funktion des Aktienpreises mit } \Delta \partial_x c = \Phi(h_1) > 0.$$

$\partial_x c$ ist das sogenannte Delta der Option und bestimmt eine Replikationsstrategie.

Ist $(A^{(y)}(t))_{0 \leq t \leq T}$ der Aktienpreisprozeß zu Anfangskurs y , so wird durch $(H_1(t), H_2(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$H_2(t) = \frac{\partial c}{\partial x}(A^{(y)}(t), T - t)$$

$$H_1(t) = -Ke^{-rt}\Phi(h_2(A^{(y)}(t), T - t))$$

eine Handelsstrategie definiert, die Anteile $H_1(t)$ im Bankkonto und $H_2(t)$ in der Aktie angibt, so daß $V_t(H) = H_1(t)e^{rt} + H_2(t)A^{(y)}(t)$

$$= c(A^{(y)}(t), T - t)$$

$H = (H_1, H_2)$ ist der sogenannte Δ -Hedge für die Call-Option.

- (iv) c ist strikt konvex in Aktienpreis x mit $\partial_x^2 c = \phi(h_1)\partial_x h_1 = \phi(h_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{tx}} > 0$

$\Gamma = \partial_x^2 c$ heißt das Gamma der Option.

Γ ist ein Maß für die Änderung von Δ .

Γ groß bedeute starke Änderung von Δ bedeutet starke Tendenz zur Portfolioumschichtung.

Γ klein bedeutet eine geringe Änderung von Δ bedeutet eine geringe Tendenz zur Portfolioumschichtung.

- (v) c wächst mit der Laufzeit mit $\partial_t c = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\phi(h_1) + Kre^{-rt}\Phi(h_2)$

$\Theta = \partial_t c$ heißt Theta der Option.

Die Formel folgt aus:

$$\partial_t h_2 = \partial_t h_1 - \frac{1}{2}\sigma t^{-\frac{1}{2}} \text{ und } x\phi(h_1(x, t)) - Ke^{-rt}\phi(h_2(x, t)) = 0$$

denn:

$$\partial_t c = x\phi(h_1)\partial_t h_1 - e^{-rt}K\phi(h_2)\partial_t h_2 + re^{-rt}\Phi(h_2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma x}{\sqrt{t}}\phi(h_1) + Kre^{-rt}\Phi(h_2)$$

Dies ist eine spezifische Call-Eigenschaft. Beim Put ist dies nicht erfüllt.

- (vi) Der Optionspreis wächst mit der Volatilität σ

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = x\phi(h_1)\sqrt{t} > 0$$

$\Lambda = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$ wird als Lambda oder auch Vega der Option bezeichnet.

Die Formel folgt aus:

$$\frac{\partial h_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_1}{\partial \sigma} - \sqrt{t}, x\phi(h_1) - ke^{-rt}\phi(h_2) = 0$$

Eine hohe Volatilität signalisiert eine erhöhte Unsicherheit im Markt, die zu höheren Optionspreisen führt.

- (vii) Der Optionspreis wächst mit der Zinsrate r

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K * te^{-rt}\Phi(h_2) > 0$$

$\rho = \frac{\partial c}{\partial r}$ wird als rho der Option bezeichnet.

Die Formel folgt aus:

$$\frac{\partial h_2}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r} \text{ und } x\phi(h_1) - Ke^{-rt}\phi(h_2)$$

- (viii) Der Optionspreis fällt mit steigender Basis K .

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rt}\Phi(h_2) < 0$$

Die Formel folgt aus:

$$\frac{\partial h_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_1}{\partial \sigma}, x\phi(h_1) - Ke^{-rt}(h_2) = 0$$

6.9 implizite Volatilität und Smile-Effekt

BS-Modell ist ein einfaches Modell zur Beschreibung von Aktienkursen.

Frage: Erklärt das Modell die auftretenden Empirischen Phänomene?

Ein Phänomen ist der Smile-Effekt, der in das BS-Modell nicht vorkommt.

Hierzu betrachtet man bei festem Anfangsaktienkurs x , fester Laufzeit T , feste Zinsrate r den Callpreis als Funktion der Basis.

Zu verschiedenen Basispreisen K sind die Marktpreise $c_{\text{markt}}(K)$ der dazugehörigen Optionen abrufbar.

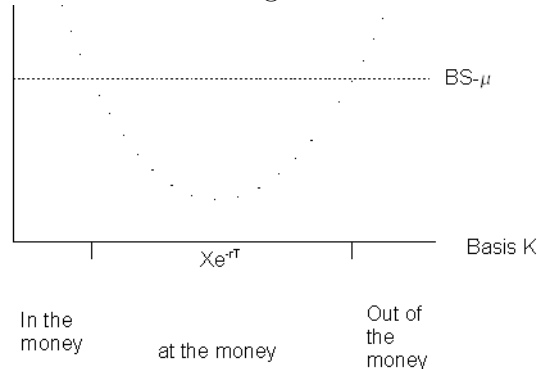
Zu jedem K kann die Modell-Volatilität $\sigma(K)$ so bestimmt werden, daß Modellpreis und Marktpreis übereinstimmt, d.h. $c(x, T, \sigma(K), K) = C_{\text{Markt}}(K)$

$\sigma(K)$ ist die sogenannte implizite Volatilität.

Wäre das Black-Scholes-Modell exakt richtig, so gäbe es nur eine Modell-Volatilität.

Also wäre $\sigma(K)$ konstant in K .

Man stellt aber folgenden Verlauf für $\sigma(K)$ fest:



28.01.2010

6.10 Black-Scholes-Formel für den Put

Betrachte Claim der Form:

$$C = (K - A_T^{(x)})^+$$

x -Anfangspreis

K - Basispreis

T - Laufzeit

zu berechnen ist:

$$P_t(C) = e^{rt} E^*(e^{-rT}(K - A_T^{(x)})^+ | F_t) \\ = E^*(e^{-r(T-t)}(K - A_T^{(x)})^+ | F_t)$$

als arbitragefreien Preisprozeß des Claims.

Definiere hierzu

$$p(x, s) = E^* e^{-rs} (K - A_s^{(x)})^+ \text{ für alle } x > 0, 0 \leq s \leq T$$

Dies ist der Anfangspreis eines Puts mit Laufzeit s und Anfangspreiskurs x.

Es gilt:

$$p(x, s) = e^{-rs} K P^*(A_s^{(x)} \leq K) - E^* e^{-rs} A_s^{(x)} 1_{A_s^{(x)} \leq K} \\ = e^{-rs} K P^*(A(s) \leq K/x) - x P_\sigma^*(A_s \leq K/x)$$

Weiter gilt:

$$A(s) = e^{rs} \exp(\sigma \bar{W}(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 s)$$

mit Wiener-Prozeß $\bar{W}$ bzgl. P^*

$$\text{Also } P^*(A(s) \leq K/x) = \Phi\left(\frac{\log(K/x) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)s}{\sigma \sqrt{s}}\right)$$

Ferner:

$$A(s) = \exp(\sigma^2 + r)s \exp(\sigma \bar{W} - \frac{1}{2} \sigma^2 s)$$

mit $\bar{W}$ Wiener-Prozeß bzgl. P_{σ^*}

Also

$$P_\sigma^*(A(s) \leq K/x) = P_\sigma^*\left(\frac{\bar{W}(s)}{\sqrt{s}} \leq \frac{\log(K/x) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)s}{\sigma \sqrt{s}}\right) \\ = \Phi\left(\frac{\log(K/x) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)s}{\sigma \sqrt{s}}\right)$$

Insgesamt also

$$p(x, s) = e^{-rs} K \Phi\left(\frac{\log(K/x) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)s}{\sigma \sqrt{s}}\right) - x \Phi\left(\frac{\log(K/x) - (r + \frac{1}{2} \sigma^2)s}{\sigma \sqrt{s}}\right)$$

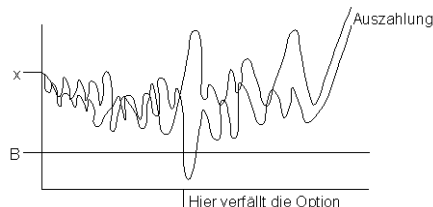
Mit Hilfe der Markov-eigenschaft erhält man wie beim Call $P_t(C) = p(A_t^{(x)}, T - t)$, für alle $0 \leq t \leq T$

6.11 Barriere-Option

Für viele Investoren ist Call oder Put zu teuer.

Deshalb werden Barriere-Optionen betrachtet.

z.B. ein down and out Call mit Laufzeit T, Strike K und Barriere B verhält sich wie ein Call solange der Aktienkurs oberhalb der Barriere bleibt. Unterschreitet die Aktie während der Laufzeit die Barriere, verfällt der Call.



x Anfangsaktienkurs

Die Claimauszahlung eines down-and-out Calls mit Barriere $B < x$ ist definiert

durch.

$$C = (A^{(x)}(T) - K)^+ 1_{\int_{0 \leq s \leq T} A_s^{(x)} > B}$$

Dies ist eine Pfadabhängige Option.

Als Anfangspreis er gibt sich $\beta_C(x, T, K, B) = E^* e^{-rT} C$

$$= E^* e^{-rT} (A_T^{(x)} - K)^+ 1_{\inf_{0 \leq s \leq T} A_s^{(x)} > B}$$

Das explizite Berechnung ist schwieriger als beim einfachen Call.

Folgendes Lemma ist hilfreich:

Lemma:

Sei $(X(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß mit Drift a d.h. $(X(t) - at)_{t \geq 0}$ ist ein Wiener-Prozeß.

Sei $Z(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} X(s)$ für alle $t \geq 0$

Für $x, s \in R$ mit $z \geq x$ gilt:

$$P(X(t) \leq x, Z(t) \leq z) = \Phi\left(\frac{x-at}{\sqrt{t}}\right) - e^{2az} \Phi\left(\frac{s-2z-at}{\sqrt{t}}\right)$$

Die Aussage: folgt mit dem Satz von Girsanov und der Verteilung des Maximums bei einem Wiener-Prozeß siehe (5.6).

$W(t) = X(t) - at, t \geq 0$ definiert einen Wiener-Prozeß bzgl. P .

Definiere das Wahrscheinlichkeitsmaß P_a auf F_t durch $\frac{dP_a}{dP}|_{F_t} = \exp(aW(t) - \frac{1}{2}a^2t)$.

Dann ist bzgl. P_a nach dem Satz von Girsanov:

$\bar{W}(s) = W(s) - as, 0 \leq s \leq t$ eine Wiener-Prozeß bzgl. P_a .

Also ist:

$W(s) = \bar{W}(s) + as, 0 \leq s \leq t$ ein Wiener-Prozeß mit Drift bzgl. P_a .

$$M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} W(s)$$

$$P(X(t) \leq x, Z(t) < z) = P_a(W(t) \leq x, M(t) < z) = \int_{W(t) \leq x, M(t) < z} \exp(aW(t) - \frac{1}{2}a^2t) dP$$

$$= E(g(W(t)) 1_{M(t) < z})$$

$$\text{mit der } g(y) = \exp(ay - \frac{1}{2}a^2t) 1_{(-\infty, x]}(y)$$

$$= E(g(W(t)) | M(t) < z) P(M(t) < z)$$

Zur Berechnung des bedingten Erwartungswertes wird die bedingte Verteilung von $W(t)$ -gegeben $M(t) < z$ bestimmt.

Wegen (5.6) folgt:

$$P(w(t) \leq x, M(t) < z) = P(W(t) \leq x) - P(W(t) \leq x, M(t) \geq z)$$

$$\underline{\underline{\text{Spiegelungsprinzip}}} \quad P(W(t) \leq x) - P(W(t) > 2z - x)$$

$$= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - (1 - \Phi\left(\frac{2z-x}{\sqrt{t}}\right))$$

$$= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2z-x}{\sqrt{t}}\right)$$

Also:

$$P(W(t) \leq x | M(t) < z) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq z \\ \frac{\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1 + \Phi(\frac{2z-x}{\sqrt{t}})}{P(M(t) < z)} & \text{für } x \leq z \end{cases}$$

Durch Differenzieren nach x erhält man die bedingte Dichte.

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{t} P(M(t) \leq z)} (\phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{2z-x}{\sqrt{t}}))$$

$h(y) = 0$ für $y > z$ und damit:

$$\begin{aligned}
 & Eg(W(t))1_{M(t) < z} = \int_0^z g(y)h(y)dyP(M(t) < z) \\
 & = E(g(W(t))|M(t) < z)P(M(t) < z) \\
 & = \int_{-\infty}^z 1_{(-\infty; x]}(y) \exp(ay - \frac{1}{2}a^2t)hydyP(M(t) < z) \\
 & \stackrel{x \leq z}{=} \int_{-\infty}^z e^{ay - \frac{1}{2}a^2t} \frac{1}{\sqrt{t}} (\phi(\frac{y}{\sqrt{t}}) - \phi(\frac{2z-y}{\sqrt{t}}))dy \\
 & = \Phi(\frac{x-at}{\sqrt{t}}) - e^{2az}\Phi(\frac{x-2z-at}{\sqrt{t}}) \\
 & \text{denn } \int_{-\infty}^x e^{ay - \frac{1}{2}a^2t} \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\frac{y}{\sqrt{t}})dy \\
 & = E \exp(aW(t) - \frac{1}{2}a^2t)1_{W(t) \leq x} \\
 & = P_a(W(t) \leq x) \\
 & = P_a(W(t) - at \leq x - at) \\
 & = \Phi(\frac{x-at}{\sqrt{t}}), W(t) - at \sim N(0, t) \text{ bzgl. } P_a \\
 & \int_{-\infty}^x e^{ay - \frac{1}{2}a^2t} \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\frac{2z-y}{\sqrt{t}})dy \\
 & = E \exp(a(W(t) + 2z) - \frac{1}{2}a^2t)1_{W(t)+2z \leq x} \\
 & \text{beachte: } W(t) + 2z \text{ hat Dichte } y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\frac{2z-y}{\sqrt{t}}) \\
 & e^{2az}P(W(t) + 2z \leq x) = e^{2az}P_a(W(t) - at \leq x - 2z - at) \\
 & = e^{2az}\Phi(\frac{x-2z-at}{\sqrt{t}})
 \end{aligned}$$

Das Lemma wird nun angewandt, um den Preis einer Barriere-Option zu berechnen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & E^* e^{-rT} (A_T^{(x)} - K)^+ 1_{\inf_{0 \leq s \leq T} A_s^{(x)} > B} \\
 & = x E^* e^{-rT} A(T) 1_{\inf_{0 \leq s \leq T} A_s > B/x, A(T) > K/x} \\
 & K e^{-rT} P^*(\inf_{0 \leq s \leq T} A_s > B/x, A(T) > K/x)
 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 & P^*(\inf_{0 \leq s \leq T} A_s > B/x, A(T) > K/x) \\
 & = \inf_{0 \leq s \leq T} \log(A_s) > \log(B/x), \log(A(T)) > \log(K/x) \\
 & = P^*(-\inf_{0 \leq s \leq T} \log(A(s) < \log(B/x), -\log(A(T) < \log(x/K))) \\
 & = P^*(\sup_{0 \leq s \leq T} -\log(A(s) < \log(x/B), -\log(A(T)) < \log(x/K))
 \end{aligned}$$

Bzgl. P^* ist:

$$(\log(A(s))1/\sigma = -\bar{W}(s) + (\frac{1}{2}\sigma - r/\sigma)s, s \geq 0$$

ein Wiener-Prozeß mit Drift $a = \frac{1}{2}\sigma - r/\sigma$

und damit folgt mit dem Lemma:

$$\begin{aligned}
 & P^*(\inf_{0 \leq s \leq T} A(s) > B/x, A(T) > K/x) \\
 & = \Phi(\frac{1/\sigma \log(x/K) - aT}{\sqrt{T}}) - e^{2a1/\sigma \log(x/B)} \Phi(\frac{1/\sigma \log(x/K) - 2/\sigma \log(x/B) - aT}{\sqrt{T}}) \\
 & = \Phi(\frac{\log(x/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) \\
 & = (x/B)^{2a/\sigma} \Phi(\frac{\log(B/(Kx)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sqrt{T}})
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung von

$$E^* e^{-rT} A(T) 1_{\inf_{0 \leq s \leq T} A(s) > B/x, A(T) > K/x}$$

führe einen Maßwechsel zu P_σ^* durch mit

$$\frac{dP_\sigma^*}{dP^*} F_t = e^{-rT} A(T)$$

Dann ist $A(t)$ ein geometrischer Wiener-Prozeß bzgl. P_σ^* mit Drift $r + \sigma^2$ und man erhält analog

$$P_\sigma^* \left(\inf_{0 \leq s \leq T} A(s) < B/x, A(T) > K/x \right) \\ = \Phi \left(\frac{\log(x/B) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \frac{x}{B} \frac{2b/\sigma}{\sigma\sqrt{T}} \Phi \left(\frac{\log(B^2/(xK)) + r(\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \text{ mit } b = -r/\sigma - 1/2\sigma$$

Fasst man beide Terme zusammen erhält man:

$$A(x, T, K, B) = c(x, T, K) - (x/B)^{2b/\sigma} c(x, T, Kx^2/B^2)$$

$$da(x/B)^{2a/\sigma} = (x/B)^{2b/\sigma+2}, 2a/\sigma - 2b/\sigma = 2$$